MATEMÁTICA

ATIVIDADES EXPERIMENTAIS E INVESTIGATIVAS

ESCOLA DE TEMPO INTEGRAL

CADERNO DO PROFESSOR

ENSINO MÉDIO

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

MATERIAL DE APOIO
AO PROGRAMA ENSINO INTEGRAL
DO ESTADO DE SÃO PAULO

MATEMÁTICA
ATIVIDADES EXPERIMENTAIS E INVESTIGATIVAS

ENSINO MÉDIO
CADERNO DO PROFESSOR

Primeira edição

2014

São Paulo

Governo do Estado de São Paulo

Governador

Geraldo Alckmin

Vice-Governador

Guilherme Afif Domingos

Secretário da Educação

Herman Jacobus Cornelis Voorwald

Secretária-Adjunta

Cleide Bauab Eid Bochixio

Chefe de Gabinete

Fernando Padula Novaes

Subsecretária de Articulação Regional

Raquel Volpato Serbi Serbino

Coordenadora da Escola de Formação e Aperfeiçoamento dos Professores – EFAP

Silvia Andrade da Cunha Galletta

Coordenadora de Gestão da Educação Básica

Maria Elizabete da Costa

Coordenadora de Gestão de Recursos Humanos

Cleide Bauab Eid Bochixio

Coordenadora de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional

Ione Cristina Ribeiro de Assunção

Coordenadora de Infraestrutura e Serviços Escolares

Dione Whitehurst Di Pietro

Coordenadora de Orçamento e Finanças

Claudia Chiaroni Afuso

Presidente da Fundação para o Desenvolvimento da Educação – FDE

Barjas Negri

Prezado(a) professor(a),

Em dezembro de 2011, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo instituiu o Programa Educação – Compromisso de São Paulo, que tem como um de seus pilares expandir e aperfeiçoar a política de Educação Integral, como estratégia para a melhoria da qualidade do ensino e, portanto, para o avanço na aprendizagem dos alunos.

Nesse contexto, foi criado, em 2012, o Programa Ensino Integral, com o objetivo de assegurar a formação de jovens autônomos, solidários e competentes por meio de um novo modelo de escola. Esse novo modelo, entre outras características, prevê jornada integral aos alunos, currículo integrado, matriz curricular diversificada, Regime de Dedicação Plena e Integral dos educadores e infraestrutura que atenda às necessidades pedagógicas do Programa Ensino Integral. Essa estrutura visa proporcionar aos alunos as condições necessárias para que planejem e desenvolvam o seu Projeto de Vida e se tornem protagonistas de sua formação. O Programa, inicialmente direcionado a escolas de Ensino Médio, teve sua primeira expansão em 2013, quando passou a atender também os anos finais do Ensino Fundamental. O Programa deverá continuar sua expansão nos segmentos que já atende e ampliar sua atuação na Educação Básica, compreendendo também escolas dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Esta série de cadernos contempla um conjunto de publicações que se destina à formação continuada dos profissionais que atuam no Programa Ensino Integral e também ao apoio dos adolescentes e jovens em busca de uma aprendizagem bem-sucedida. Os cadernos ora apresentados têm um duplo objetivo: por um lado, oferecer subsídios para otimizar o uso dos laboratórios, com base nas diretrizes que fundamentam este Programa; por outro, destacar estratégias metodológicas que, em todos os componentes curriculares, concorrem para que os estudantes possam ampliar suas competências na área de investigação e compreensão – para observar, descrever, analisar criticamente os diferentes fenômenos de cada área, levantar hipóteses que os expliquem e propor iniciativas para mudar a realidade observada. A série é composta pelas seguintes publicações:

- Biologia: atividades experimentais e investigativas
- Ciências Físicas e Biológicas: atividades experimentais e investigativas
- Física: atividades experimentais e investigativas
- Manejo e gestão de laboratório: guia de laboratório e de descarte
- Matemática – Ensino Fundamental – Anos Finais: atividades experimentais e investigativas
- Matemática – Ensino Médio: atividades experimentais e investigativas
- Química: atividades experimentais e investigativas
- Pré-iniciação Científica: desenvolvimento de projeto de pesquisa
- Robótica – Ensino Fundamental – Anos Finais
- Robótica – Ensino Médio

Pretende-se, dessa maneira, contribuir para que as escolas desenvolvam atividades experimentais e investigativas nos laboratórios, nos segmentos a seguir:

- Ensino Fundamental – Anos Finais: nas aulas de Ciências Físicas e Biológicas e de Matemática; nas aulas de Práticas Experimentais; e nas aulas de disciplinas eletivas, dependendo da especificidade dos temas e conteúdos selecionados.

- Ensino Médio: nas aulas de Biologia, Física e Química, da 1ª a 3ª séries; nas aulas de Prática de Ciências, na 1ª e 2ª séries; nas aulas de disciplinas eletivas, da 1ª a 3ª séries, dependendo da especificidade dos temas e conteúdos selecionados; e em atividades para o desenvolvimento de Projetos de Pré-iniciação Científica dos alunos.

Bom trabalho!

Equipe do Programa Ensino Integral

SUMÁRIO

ORIENTAÇÕES SOBRE OS CONTEÚDOS DO CADERNO

Prezado(a) professor(a),

As atividades apresentadas neste Caderno partem do pressuposto de que a compreensão e a construção de conceitos podem ser favorecidas por meio das reflexões que os estudantes fazem sobre experiências com objetos concretos e também sobre os resultados de investigações a respeito de uma questão. A proposta aos estudantes de situações desafiadoras que os levem a assumir uma postura semelhante à de um matemático, levantando conjecturas, é um caminho potencialmente rico para a aprendizagem de conceitos, procedimentos e, sobretudo, atitudes.

Considerar essa posição significa propor situações investigativas, de modo que os estudantes vivenciem a Matemática como uma atividade sujeita a acertos e erros, que consiste em um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contraexemplos, de refutação, de aplicação, de demonstração e de comunicação. No ensino e na aprendizagem da Matemática, investigar significa trabalhar a partir de questões que interessam aos estudantes (ou que possam vir a interessá-los) e que se apresentam inicialmente confusas, mas que eles conseguem clarificar e estudar de modo organizado com seu apoio.

É preciso levar em conta que, para investigar, é também necessário que os estudantes formulem suas próprias questões, de modo a respondê-las, tanto quanto possível, com boa fundamentação – é preciso perseverança na busca de soluções. Uma tarefa investigativa não se reduz apenas à proposição de uma pergunta para a qual os estudantes buscam a resposta. É necessário que, além de pesquisar, eles elaborem também outras perguntas, façam conjecturas e desenvolvam autonomia. Assim, uma investigação matemática se caracteriza por ser uma situação-problema desafiadora que leva os estudantes a mobilizar sua intuição e seus conhecimentos já construídos em diversas alternativas de exploração.

Nesse processo, os estudantes devem buscar uma argumentação que convença tanto os colegas quanto você, professor. Para isso, eles devem aprender a se comunicar, utilizando não apenas a oratória, mas outros diversos recursos, por exemplo, gráficos, diagramas, tabelas e gráficos cartesianos.

Para dirigir esse processo, é preciso que você organize, desde o princípio, com seus estudantes, as ações orientadas aos aspectos que interessam. E essa é a função deste material: ajudá-lo a organizar e orientar as ações a ser desenvolvidas no laboratório de Matemática. Nessa direção, destaca-se que, para que as práticas pedagógicas sejam mais efetivas, é preciso sempre considerar:

- as referências culturais e familiares que os estudantes levam para a escola não podem ser negadas, mas devem ser progressivamente transformadas ou substituídas;
- a resistência para substituir alguns conceitos só é superada se o conceito matemático for significativo, fizer sentido e for útil;
- apresentar contraexemplos pode provocar conflitos cognitivos, mobilizando os estudantes a testar suas próprias concepções;
- os estudantes devem ser estimulados a considerar e/ou buscar soluções alternativas para um mesmo problema;

- por meio do diálogo entre você e os estudantes, assim como pela observação dos diálogos travados entre eles, é possível conhecer seus modos de raciocinar e diagnosticar seu desenvolvimento nos vários momentos de aprendizagem;
- os estudantes devem ter a possibilidade de explicar suas ideias, retomando seu processo de trabalho, e analisar seu desenvolvimento.

Os aspectos apresentados anteriormente, aliados às habilidades que se intenciona desenvolver durante as investigações, fornecem a pauta de observação para realizar a avaliação das propostas e dos estudantes nas atividades de laboratório.

Vale observar que a validação do conhecimento matemático, na perspectiva da comunidade científica, ocorre apenas pela demonstração formal, ou seja, a Matemática não é uma ciência empírica. Nenhuma verificação experimental ou medição feita em objetos físicos pode, por exemplo, validar matematicamente o teorema de Pitágoras ou o teorema relativo à soma dos ângulos de um triângulo. Deve-se enfatizar, contudo, o papel heurístico que desempenham os contextos materiais como fontes de conjecturas matemáticas. Esse papel heurístico é fundamental para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Assim, cabe a você a decisão de propor a validação do conhecimento do ponto de vista da Matemática frente às conjecturas elaboradas pelos estudantes, ou seja, a demonstração de fórmulas e propriedades.

Nesse sentido, cabe também lembrar que, em tarefas investigativas que envolvem noções e conceitos matemáticos, utiliza-se a palavra conjectura e não a palavra hipótese, ao contrário das Ciências da Natureza. Em Matemática, hipótese não é algo a ser provado ou refutado, e sim um resultado – verdadeiro – que permite provar ou demonstrar uma tese. Se provada, a tese pode ser utilizada como hipótese para provar outra tese.

Por fim, cabe destacar que, na primeira sequência de atividades propostas neste Caderno, não são necessárias as demonstrações matemáticas, tendo em vista que as tarefas investigativas são de outras modalidades, pois os estudantes utilizam a Matemática como ferramenta para investigar e compreender fatos reais da sociedade brasileira. Ao longo do Caderno, há sugestões de resposta às atividades propostas aos estudantes, indicadas em itálico.

TEMA 1: INVESTIGAÇÕES SOBRE O CUSTO DE VIDA

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Esta Atividade, que está dividida em etapas, tem por finalidade apresentar um contexto real e significativo – cesta básica e custo de vida – de modo que os estudantes façam investigações e utilizem conhecimentos matemáticos já construídos e/ou em construção, sobretudo os relativos à proporcionalidade, às representações gráficas e à estatística. Antes de iniciar a atividade, entretanto, é importante retomar as concepções e crenças dos estudantes a respeito de custo de vida e da cesta básica, etapa em que devem fazer conjecturas e construir as próprias respostas. Promova o interesse e a reflexão dos estudantes sobre as questões envolvidas na situação-problema, pois a motivação em sala de aula é um fator fundamental para que as tarefas investigativas alcancem os objetivos previstos no Currículo de Matemática.

Portanto, tal Atividade tem os seguintes objetivos:

- levar os estudantes a elaborar conjecturas a respeito das questões propostas, buscando sua validação ou refutação;
- favorecer a construção de uma argumentação consistente sobre assuntos relacionados à situação-problema, aprofundando, consequentemente, sua compreensão sobre a realidade;
- desenvolver um projeto de pesquisa cuja finalidade é o cálculo médio do custo da cesta básica e o da inflação em relação a um determinado grupo de estudantes.

Tema

Números e tratamento da informação.

Conteúdos envolvidos

Razões e proporções; relações de interdependência entre grandezas; função polinomial do 1º grau; medidas de tempo; coleta e organização de dados; média aritmética; gráficos estatísticos (leitura e construção).

Habilidades

Compreender significados de inflação e de custo de vida, utilizando conhecimentos matemáticos relacionados à proporcionalidade e à estatística para o cálculo de índices; analisar criticamente informações e opiniões veiculadas pela mídia, à luz dos conhecimentos matemáticos; compreender a importância da estatística na atividade humana, embora ela possa induzir a erros de julgamento, por meio da manipulação de dados e da apresentação incorreta das informações; desenvolver a capacidade de investigação e fortalecer a perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados; encontrar exemplos e contraexemplos, formular conjecturas para comprová-las ou refutá-las; utilizar diferentes representações matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a cada situação-problema de maneira que facilite sua compreensão, análise e comunicação; valorizar o trabalho coletivo na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação; valorizar o uso dos recursos tecnológicos como instrumentos que podem auxiliar na realização de trabalhos sem anular a atividade compreensiva.

Número de aulas

9 aulas (Etapas de 1 a 5) e 12 horas (Etapa 6).

Série

Esta Atividade é indicada para a 1ª série do Ensino Médio. Todavia, ela pode ser proposta aos estudantes das séries seguintes por tratar de tema social relevante e por envolver noções fundamentais de Matemática que devem ser desenvolvidas e aprofundadas ao longo do Ensino Fundamental como, por exemplo, a proporcionalidade, leitura e a construção de gráficos estatísticos.

COMO INVESTIGAR O PROBLEMA?

Execução da atividade investigativa

Divida a turma em grupos de, no máximo, quatro estudantes, entregue os textos a ser lidos e a lista de tarefas a ser realizadas, além de uma calculadora. Disponibilize também folhas para os registros e réguas solicitadas na atividade. Marque horário no laboratório de informática, onde os grupos devem fazer as pesquisas e executar parte das tarefas, como a construção de gráficos por meio de uma planilha eletrônica. É fundamental que os estudantes elaborem sínteses das reflexões e discussões ocorridas nos próprios grupos e nos grupos dos demais colegas, sobretudo aquelas que decorrerem das informações obtidas na internet. Convém ressaltar que informação não é conhecimento.

Material necessário

Calculadoras científicas; materiais de desenho (réguas, esquadros e compassos para a construção de gráficos); quadro expositor; uso do laboratório de informática (internet); papel para construção e apresentação de gráficos; kit multiuso de Matemática e Estatística (opcional).

Procedimentos a ser adotados

Etapa 1 – Introdução ao tema: cesta básica

Proponha aos estudantes que façam a leitura do artigo e que, em seguida, respondam às questões propostas. O objetivo principal dessa etapa é introduzir essa temática aos estudantes. Vale observar que, quando você propuser a discussão desse texto, também pode recorrer a outros tipos de materiais. Em cadernos de Economia dos jornais, nos portais de notícias ou no *site* do Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese), há artigos constantemente atualizados que comparam os preços em diferentes capitais. Os gráficos a ser construídos podem ser feitos no papel, no laboratório de informática ou utilizando o multiplano do kit de Matemática e Estatística.

Custo da cesta básica sobe em 16 capitais em março, diz Dieese

Maiores altas partiram de Campo Grande, Goiânia, Porto Alegre e Curitiba. Preço do tomate aumentou em 15 capitais, registrando alta de até 93,14%.

O custo da cesta básica subiu em março de 2014 em 16 das 18 capitais pesquisadas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos – Dieese. As maiores altas partiram de Campo Grande (12,85%), Goiânia (12,61%), Porto Alegre (12,52%) e Curitiba (12,29%).

Das 18 capitais pesquisadas, Porto Alegre registrou a cesta básica mais cara. Em março, o preço ficou em R$ 356,17. Na sequência, aparecem São Paulo (R$ 351,46), Florianópolis (R$ 345,63) e Rio de Janeiro (R$ 345,11). Na outra ponta estão as cestas básicas de Manaus e Belo Horizonte, que ficaram mais baratas: 1,25% e 0,41%, respectivamente. Os menores valores médios foram observados em Aracaju (R$ 225,82), João Pessoa (R$ 263,17) e Natal (R$ 271,31).

O preço do tomate aumentou em 15 capitais, variando de 93,14%, em Porto Alegre, e 0,72%, no Recife. Houve queda em Belo Horizonte (–5,84%), Manaus (–3,24%) e Natal (–0,81%). "O preço do tomate sofre grande influência das condições climáticas e a estiagem do início do ano fez com que a colheita fosse antecipada, principalmente no Sul e o plantio, postergado no Sudeste, de forma que afetou a oferta do produto e elevou o preço", diz o Dieese em nota.

O óleo de soja também ficou mais caro em 15 cidades, com altas entre 12,87%, em Natal, e 2,11%, em Brasília. Em Salvador, o preço não variou e recuou em Belo Horizonte (–0,69%) e no Rio de Janeiro (–0,29%). "O calor prejudicou a produção e a qualidade da soja produzida no país, o que diminuiu a oferta do insumo básico do óleo de soja. Além disso, os produtores estão estocando o grão, em busca de melhores cotações", afirma o Dieese. O café em pó também teve seu preço reajustado em 15 cidades, influenciado, principalmente, pela estiagem dos últimos meses, prejudicando a safra atual. "Soma-se a isso, o crescimento da exportação do café". Os preços aumentaram entre 3,06% em Salvador e 0,14% em Vitória. As quedas partiram de Aracaju (–1,73%), São Paulo (–1,11%) e Belém (–0,62%)[1].

A alta nos preços dos produtos alimentícios essenciais, em abril, continuou a predominar em quase todas as 18 capitais onde o Dieese realiza, mensalmente, a Pesquisa da Cesta Básica de Alimentos. A única retração foi registrada em Goiânia (–5,41%). Porto Alegre foi a capital onde se apurou o maior valor para a cesta básica (R$ 359,37), apesar de a variação verificada ser a oitava menor, 0,90% em relação a março. Na sequência aparecem São Paulo (R$ 357,85), Florianópolis (R$ 351,66) e Vitória (R$ 351,27). Os menores valores médios foram observados em Aracaju (R$ 238,04), João Pessoa (R$ 270,15) e Salvador (R$ 274,38).

No acumulado dos primeiros quatro meses de 2014, as 18 capitais apresentaram alta no valor da cesta básica. As maiores elevações situaram-se em Brasília (14,43%), Curitiba (11,42%) e Florianópolis (10,12%). Os menores aumentos foram verificados em Manaus (0,63%), Natal (3,37%) e Salvador (3,49%).

[1] Disponível em: <http://g1.globo.com/economia/seu-dinheiro/noticia/2014/04/custo-da-cesta-basica-sobe-em-16-capitais-em-marco-diz-dieese.html>. Acesso em: 21 jul. 2014.

Depois da leitura, peça aos estudantes que realizem as atividades a seguir.

a) Discuta com seu grupo as informações veiculadas pelo artigo e registre suas conclusões.

b) Investigue o significado que os economistas dão à expressão "cesta básica" e escreva um pequeno texto a respeito das informações pesquisadas. Investigue o histórico, os componentes de uma cesta básica e a razão da inclusão desses componentes na época. Destaque as informações que você julgar mais interessantes para discutir com seu grupo e com os demais colegas.

c) Qual é a capital que tem a cesta mais cara em março? E qual tem a mais barata?
No mês de março, Porto Alegre é a capital que tem a cesta mais cara, e Aracaju, a que tem a mais barata. No entanto, isso não significa que essas posições se mantenham ao longo do tempo. O custo de vida é sazonal.

d) No terceiro parágrafo, há uma informação de que, em março, não houve aumento no custo das cestas de Manaus e de Belo Horizonte, uma vez que elas ficaram mais baratas. No entanto, as cestas mais baratas foram a de Aracaju, a de João Pessoa e a de Natal. Essas informações são contraditórias? Explique.
O fato de o preço ter sido reduzido no mês de março não significa, evidentemente, que elas foram as mais baratas.

e) Comparando os custos das cestas básicas de Aracaju e Porto Alegre em março, pode-se calcular que a cesta de Porto Alegre é 57,7% mais cara que a de Aracaju. Mostre como esse resultado pode ser obtido.
A diferença de preço entre as duas cestas é de R$ 130,35. Essa diferença deve ser comparada com o preço anterior da cesta de Aracaju, assim tem-se: $130{,}35 \div 225{,}82 = 0{,}577$, isto é, 57,7%.

f) Se a cesta de Porto Alegre é 57,7% mais cara que a de Aracaju, pode-se afirmar que a de Aracaju é 57,7% mais barata em relação à de Porto Alegre? Explique.
Não, pois essa porcentagem diz respeito ao valor da cesta de Aracaju e não em relação ao da cesta de Porto Alegre. Assim, a relação seria $130{,}35 \div 356{,}17 = 0{,}366$, isto é, 36,6%.

g) Segundo o texto, o custo, em março, da cesta básica na cidade de São Paulo foi de R$ 351,46. Sabe-se que o aumento percentual em relação a abril foi de 1,82%. Qual é o custo da cesta em abril nessa capital?
$351{,}46 \cdot 1{,}0182 = 357{,}85$, isto é, a cesta passou a custar R$ 357,85.

h) Sabe-se que, em abril, com retração de 5,41%, o custo da cesta básica de Goiânia passou a ser R$ 293,27. Assim, qual foi o custo da cesta de Goiânia em março?
$1x - 0{,}0541x = 293{,}27$. Logo, $0{,}9459x = 293{,}27$. Assim, $x = 310{,}04$.

i) Esboce um gráfico que represente a variação de preços do tomate nas cinco capitais nomeadas no texto: Porto Alegre, Recife, Belo Horizonte, Manaus e Natal.

j) Comparando os dados de março e abril, o que você pode concluir? Escreva um texto que sintetize as informações obtidas e as discussões de seu grupo.
Embora essa seja uma resposta pessoal e não curta, de modo geral, os estudantes devem concluir que o custo da cesta básica é fundamental para estabelecer comparações na economia, como custo de vida e salários. Os estudantes também devem concluir que o custo da cesta básica é diferente em cada cidade, apesar de o salário-mínimo não variar. Uma cidade que tem a cesta mais cara em um mês pode não ter a mais cara no mês seguinte. Calcular a porcentagem de aumento depende do referencial: se a cesta A é 20% mais cara em relação a B, a cesta B não é 20% mais barata que A.

Etapa 2 – Quanto tempo um trabalhador de salário-mínimo precisa trabalhar para comprar uma cesta básica?

Antes de propor esta atividade, faça a seguinte pergunta: *Para comprar uma cesta básica, que também pode ser chamada de Ração Essencial Mínima (Decreto-lei nº 399 de 30/04/1938), quantas horas um trabalhador de salário-mínimo precisa trabalhar?* Peça aos estudantes que pensem sobre a pergunta e formulem suas conjecturas. Após discutir as respostas e analisar as discussões que fizeram sobre a cesta básica, proponha a análise da tabela e solicite a eles que discutam e investiguem os significados de cada coluna, sobretudo a que se refere ao tempo de trabalho, ou seja, o tempo que o trabalhador de salário-mínimo precisa para comprar a Ração Essencial Mínima. Se achar conveniente, informe que o salário-mínimo do mês de abril era um valor que variava entre R$ 722,00 e R$ 724,00 (a depender da região do país), instituído a partir de 1º de janeiro de 2014. Como se deve descontar 8% para o cálculo do salário-mínimo líquido, estabeleça com a turma que será utilizado o valor de R$ 724,00 para o cálculo do salário-mínimo líquido.

Depois proponha aos estudantes que leiam e analisem a seguinte tabela:

Pesquisa da cesta básica de alimentos
Custo e variação da cesta básica em 18 capitais
Brasil – Abril de 2014

Capital	Valor da cesta (R$)	Variação mensal (%)	Porcentagem do salário-mínimo líquido	Tempo de trabalho	Variação no ano (%)	Variação anual (%)
Porto Alegre	359,37	0,90	53,95	109h12min	9,17	15,08

Capital	Valor da cesta (R$)	Variação mensal (%)	Porcentagem do salário-mínimo líquido	Tempo de trabalho	Variação no ano (%)	Variação anual (%)
São Paulo	357,85	1,82	53,72	108h44min	9,35	3,94
Florianópolis	351,66	1,74	52,80	106h51min	10,12	12,92
Vitória	351,27	2,20	52,74	106h44min	9,30	6,79
Rio de Janeiro	346,18	0,31	51,97	105h12min	9,72	5,70
Belo Horizonte	342,49	11,49	51,42	104h04min	9,68	5,53
Curitiba	335,73	1,88	50,40	102h01min	11,42	13,16
Brasília	331,53	2,63	49,77	100h44min	14,43	7,06
Campo Grande	330,61	0,30	49,64	100h28min	9,76	11,70
Belém	310,91	0,80	46,68	94h29min	4,92	1,21
Manaus	309,66	0,48	46,49	94h06min	0,63	−8,83
Goiânia	293,27	−5,41	44,03	89h07min	6,77	3,18
Recife	288,67	3,07	43,34	87h43min	5,09	−3,24
Fortaleza	288,42	0,70	43,30	87h38min	5,47	−0,91
Natal	282,56	4,15	42,42	85h52min	3,37	−1,40
Salvador	274,38	0,67	41,19	83h23min	3,49	2,36
João Pessoa	270,15	2,65	40,56	82h05min	4,38	−7,15
Aracaju	238,04	5,41	35,74	72h20min	9,81	−3,91

Tabela 1. Fonte: Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese). Disponível em: <http://www.dieese.org.br/analisecestabasica/2014/201404cestabasica.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2014.

Solicite aos estudantes que, depois de analisar a tabela, realizem as atividades a seguir.

a) Investigue o significado de cada uma das colunas. Discuta com o seu grupo.

b) Quantas horas mensais (sem contar as horas extras) são contabilizadas para um trabalhador que ganha um salário-mínimo mensal? Explique.
Para a obtenção dos salários-mínimos horário e diário, é preciso dividir o valor do salário-mínimo mensal por 220 horas e 30 dias, respectivamente, ou seja: a) o valor do salário-mínimo/horário

é igual a R$ 3,29, ou seja, R$ 724,00 dividido por 220 horas/mês; b) o valor do salário-mínimo/diário é igual a R$ 24,13, ou seja, R$ 724,00 dividido por 30 dias.

c) Com base no valor do salário-mínimo líquido e no valor da cesta, por exemplo, é possível calcular os valores da quarta coluna – ou seja, a que indica a porcentagem do salário-mínimo líquido que está destinada à compra da cesta básica. Calcule a porcentagem do salário-mínimo líquido referente à compra da cesta básica na cidade de São Paulo. Faça também esse cálculo para a cidade onde a cesta é mais cara e para a cidade onde a cesta é mais barata e interprete os resultados. Você considera as diferenças significativas?

São Paulo: $\frac{357,85}{666,08} = 0,5372 = 53,72\%$

Porto Alegre: $\frac{359,37}{666,08} = 0,5395 = 53,95\%$

Aracaju: $\frac{238,04}{666,08} = 0,3574 = 35,74\%$

Espera-se que os estudantes concluam que essas diferenças são muito significativas. Assim, eles poderiam calcular a diferença percentual entre São Paulo e Aracaju (53,72% – 35,74% = 17,98%), o valor em reais que corresponde a essa porcentagem (17,98% · 724 = 130,18) e, por exemplo, quantos quilogramas a mais de feijão um trabalhador de São Paulo poderia comprar.

d) Calcule o tempo de trabalho que um trabalhador que receba um salário-mínimo mensal precisa para comprar uma cesta básica em São Paulo e verifique se esse tempo é, de fato, 108 horas e 44 minutos, conforme a tabela. Para realizar esse cálculo, utilize as seguintes informações: 220 horas trabalhadas em um mês e salário de R$ 724,00. Realize o mesmo procedimento para Aracaju.

Por meio de regra de três, chega-se à expressão e aos cálculos a seguir:

São Paulo:

$$x = \frac{220 \cdot 357,85}{724} \cong 108,73895\,h \rightarrow 108\,h + 0,73895\,h = 108\,h + 0,73895 \cdot 60 \cong 108h44min.$$

Aracaju:

$$x = \frac{220 \cdot 358,04}{724} \cong 72,733259\,h \rightarrow 72\,h + 0,33259\,h = 72\,h + 0,33259 \cdot 60 \cong 72h20min.$$

e) Comparando a quantidade de horas que um empregado que ganha um salário-mínimo em Aracaju precisa trabalhar para comprar uma cesta básica com a quantidade de horas que um empregado de São Paulo precisa dedicar ao trabalho para fazer a mesma compra, o que o grupo pode concluir?
Os estudantes devem concluir que Aracaju é uma cidade mais barata que São Paulo, porém também devem considerar que esse valor mais barato é sazonal, ou seja, o que ocorre num mês pode não acontecer no outro.

f) Qual é a diferença entre "variação no ano" e "variação anual"? O que essas expressões devem significar?

Muitas vezes, as tabelas estatísticas não explicitam os significados de cada coluna ou linha ou não o fazem adequadamente, deixando a interpretação para o leitor. Explique para os estudantes que, nesse contexto, a expressão "variação no ano" significa o aumento do custo da cesta básica nos quatro primeiros meses de 2014 (janeiro a abril), ao passo que "variação anual" corresponde aos últimos 12 meses (abril de 2013 a abril de 2014).

g) Estabeleça uma sentença que permita calcular o tempo T que se deve trabalhar para comprar a cesta básica C em 2014. Expresse a fórmula de T em função de C: T = f(C).

Em 2014: $T = \frac{220}{724} \cdot C$

h) Analisando os dados dessa tabela, quais seriam suas conclusões? Discuta-as com seu grupo e com a turma. Elabore um texto que sintetize suas ideias.
Os estudantes devem chegar a conclusões diversas. Uma delas – talvez a mais importante – é a de que o trabalhador de salário-mínimo trabalha muito para comprar uma cesta básica, pois, além da cesta, ele tem outros gastos: moradia, estudo, lazer, remédios etc. Além disso, se o custo da cesta básica é sazonal, ou seja, varia de acordo com a época do ano, mudar de cidade é também uma alternativa que permanece sujeita à sazonalidade.

Etapa 3 – Os preços dos alimentos sempre aumentam?

Após sistematizar as discussões ocorridas em sala de aula, proponha a análise da tabela a seguir. Todavia, antes disso, vale sugerir aos estudantes que retomem os significados de cada coluna.

SÃO PAULO
ABRIL DE 2014

Produtos	Quantidades	Gasto mensal		Variação anual (%)	Tempo de trabalho[2]	
		Abril de 2013 (R$)	Abril de 2014 (R$)		Abril de 2013	Abril de 2014
Carne	6 kg	99,54	116,28	16,82	32h18min	35h20min
Leite	7,5 L	20,70	23,25		6h43min	7h04min
Feijão	4,5 kg	29,79	19,26		9h40min	5h51min
Arroz	3 kg	7,17	7,53	5,02		2h17min
Farinha	1,5 kg	3,96	4,44	12,12	1h17min	
Batata	6 kg	21,78	26,10	19,83	7h04min	7h56min
Tomate	9 kg	54,99	45,54	−17,18	17h51min	13h50min
Pão	6 kg	51,96	56,28	8,31	16h52min	17h06min

[2] Tempo que o trabalhador de salário-mínimo precisa para comprar a Ração Essencial (Decreto-lei nº 339, de 30 de abril de 1938).

Produtos	Quantidades	Gasto mensal		Variação anual (%)	Tempo de trabalho[2]	
		Abril de 2013 (R$)	Abril de 2014 (R$)		Abril de 2013	Abril de 2014
Açúcar	3 kg	5,94	5,46	–8,08	1h56min	1h40min
Óleo	900 mL	3,20	2,91	–9,06	1h02min	0h53min
Manteiga	750 g	15,83	16,46	3,98	5h08min	5h00min
Total da cesta						

Tabela 2. Fonte: Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese). Disponível em: <http://www.dieese.org.br/analisecestabasica/cestaBasicaTab201404.html>. Acesso em: 21 jul. 2014

Solicite aos estudantes que realizem as atividades a seguir.

a) Complete as lacunas da tabela.

Cálculo da variação anual do leite: $L = \dfrac{23{,}25 - 20{,}70}{20{,}70} = \dfrac{2{,}55}{20{,}70} = 0{,}1232 = 12{,}32\%$

Cálculo da variação anual do feijão: $L = \dfrac{19{,}26 - 29{,}79}{29{,}79} = \dfrac{-10{,}53}{29{,}79} = -0{,}3535 = -35{,}35\%$

Tempo de trabalho para comprar o arroz em 2013:

$$T = \frac{220 \cdot 7{,}17}{678} = 2{,}3265\,h = 2h + 0{,}3265 \cdot 60 \cong 2h20min$$

Variação anual do café: –4,94%; tempo de trabalho em 2013 para comprar o café: 2h41min; em 2014: 2h27min.

Totais da cesta: R$ 344,30; R$ 357,85; 3,94%; 111h43min; 108h44min.

b) A variação anual do preço da manteiga é de 3,98%, ou seja, é positiva, como mostra a tabela. Todavia, o trabalhador de salário-mínimo precisou trabalhar menos em abril de 2014 do que em abril de 2013 para comprar 750 g de manteiga. Como você pode explicar isso?
Os percentuais de aumento do salário-mínimo e da manteiga foram diferentes.

c) Pesquise as razões pelas quais economistas, muitas vezes, utilizam as colunas “Tempo de trabalho” para fazer as comparações.

d) Pesquise motivos que poderiam justificar o aumento e a diminuição dos preços dos alimentos.

Etapa 4 – Índice de custo de vida

Proponha aos estudantes a interpretação do gráfico a seguir. As questões apresentadas em seguida podem constituir um bom roteiro para a discussão dos grupos.

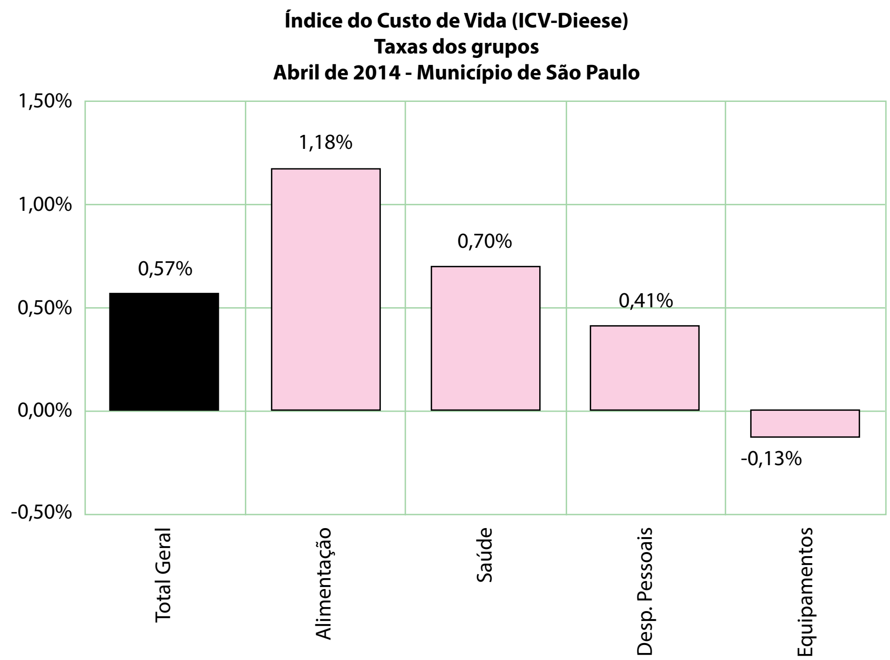


Gráfico 1. Fonte: Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese). Disponível em: <http://www.dieese.org.br/analiseicv/2014/201404analiseicv.pdf>. Acesso em: 26 ago. 2014.

a) Qual é o nome do gráfico? Que dados são apresentados por ele? Escreva um breve texto sobre seu conteúdo.
O gráfico, com base nos dados do Dieese em abril de 2014, apresenta o índice de custo de vida em relação aos índices referentes à alimentação, saúde, despesas pessoais e equipamentos. Nota-se que os preços dos equipamentos ficaram mais baratos nesse mês.

b) Você viu que o Dieese é uma instituição que calcula e divulga os índices de custo de vida. Pesquise outras instituições que também têm essa função.
Fundação Getúlio Vargas (FGV), IBGE etc.

c) Investigue o significado que as pessoas dão à expressão “custo de vida”. Entreviste pessoas de sua família, amigos, trabalhadores e proprietários do comércio do entorno da escola. Faça um resumo das ideias mais frequentes de sua pesquisa. Quais são suas conclusões?

d) O que é inflação? Explique. (Essa questão será abordada na atividade seguinte. Vale lembrar que se trata, nos itens **c** e **d**, apenas de levantar os conhecimentos prévios dos estudantes).

Etapa 5 – Calculando a inflação

Antes de iniciar a atividade, solicite e converse sobre as hipóteses dos estudantes a respeito dos significados de inflação. Faça uma discussão com eles. Depois, solicite que discutam em grupos as ideias do texto a seguir e as confrontem com suas ideias iniciais.

Os jornais em abril anunciaram que "a alta de preços ganhou força no Brasil em março de 2014. O Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), medido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) e considerado a 'inflação oficial' do país por ser usado como base para as metas do governo federal, ficou em 0,92% nesse mês anterior – a maior taxa para meses de março desde 2004.

Com a alta, a inflação acumulada no trimestre alcançou 2,18%, acima da taxa de 1,94% em igual período do ano passado. Em 12 meses, a alta acumulada é de 6,15%, acima dos 5,68% relativos aos 12 meses anteriores".[3]

Você certamente já ouviu notícias como essas, cuja finalidade é noticiar e discutir a inflação. Mas o que é exatamente a inflação?

Inflação, em Economia, é um termo utilizado para descrever uma diminuição do valor do dinheiro em relação à quantidade de alimentos, bens e serviços que se pode comprar com esse dinheiro. Em outras palavras, a inflação é determinada pela alta dos preços, não apenas dos alimentos da cesta básica, mas também de outros alimentos, artigos de higiene pessoal, produtos de limpeza, remédios, da eletricidade, água, gás, transporte público etc.

Mas os aumentos dos salários, em geral, não acompanham a alta dos preços. Esse é um dos principais problemas provocados pela inflação, pois o crescimento diferenciado dos custos prejudica muitas pessoas, apesar de beneficiar algumas poucas.

Mede-se a inflação por meio de índices que tentam refletir o aumento de preços de um setor em particular ou de um segmento de consumidores. Os índices de preços ao consumidor tentam medir a inflação média de produtos e serviços adquiridos por um cidadão com determinadas características de renda.

Para compreender o processo de obtenção de índices de inflação pelos economistas, cabe calcular, hipoteticamente, a inflação para certo consumidor. Suponha que, em um mês, esse cidadão e sua família consumam, entre outros, os seguintes produtos: 25 kg de arroz, 15 kg de feijão, 10 latas de óleo de soja, 15 kg de carne bovina, 50 litros de leite, 25 kg de pão, 10 dúzias de banana e 300 passagens de ônibus. Nesse mês, essa família não comprou produtos de higiene pessoal nem de limpeza, pois já os tinha em estoque.

A tabela a seguir apresenta os preços dos produtos que compõem a cesta básica da família em questão ao longo de dois meses (Mês 0 e Mês 1). Todos os preços indicados na tabela são hipotéticos.

Evidentemente, a variação de preços está muito alta. Mas trata-se de uma situação hipotética, com fins didáticos.

[3] Disponível em: <http://g1.globo.com/economia/noticia/2014/04/inflacao-oficial-varia-092-em-marco-diz-ibge.html>. Acesso em: 2 set. 2014.

		MÊS 0		MÊS 1	
PRODUTO	QUANTIDADE	PREÇO (R$)	SUBTOTAL (R$)	PREÇO (R$)	SUBTOTAL (R$)
Arroz	25 kg	2,40	*60,00*	2,50	*62,50*
Feijão	15 kg	4,50	*67,50*	4,80	*72,00*
Óleo (900 mL)	10 latas	3,00	*30,00*	3,50	*35,00*
Banana	20 kg	3,80	*75,00*	4,20	*84,00*
Pão	25 kg	6,00	*150,00*	5,80	*145,00*
Açúcar	15 kg	2,00	*30,00*	2,00	*30,00*
Leite	50 L	2,50	*125,00*	2,60	*130,00*
Carne	15 kg	20,00	*300,00*	25,00	*375,00*
Passagens (ônibus)	300	3,00	*900,00*	4,00	*1.200,00*
Total			*1.737,50*		*2.133,50*

Tabela 3.

Peça agora aos estudantes que respondam às seguintes questões:

a) Qual foi o gasto total no Mês 0? *R$ 1.737,50.*
b) Qual foi o gasto total no Mês 1? *R$ 2.133,50.*
c) Em relação ao Mês 0, quanto se gastou a mais no Mês 1? *R$ 396,00.*
d) Expresse essa diferença de gastos por meio de uma porcentagem. *22,79%.*
e) Qual dos produtos da tabela sofreu o maior aumento percentual? *Passagem de ônibus*: ≅ *33,33%.*
f) Suponha que outra família consuma os mesmos produtos e as mesmas quantidades, com uma única diferença: as pessoas dessa nova família não utilizam ônibus por morarem muito perto do trabalho e da escola. Refaça os cálculos feitos. Quais são suas conclusões?

Mês 0: 1.737,50 – 900,00 = 837,50

Mês 1: 2.133,50 – 1.200,00 = 933,50

933,50 – 837,50 = 96,00. Ou seja, o custo de vida aumentou menos para a segunda família.

Percentualmente: 11,46%.

O gasto com as passagens de ônibus, que sofreram o maior aumento, era muito alto para a primeira família; como a segunda família não gastou com passagens, seu custo da cesta básica foi bem menor.

Depois de os estudantes responderem às questões, proponha uma discussão sobre as ideias do texto a seguir.

O exemplo dado mostra que, no Mês 0, os consumidores necessitavam de um determinado valor para adquirir a cesta básica, ao passo que, no Mês 1, foi necessário um valor maior. A inflação do mês para essa família é medida com base no aumento percentual dos gastos de um mês para outro, em outras palavras, "quantos por cento se gastou a mais".

Se a variação do índice calculado para correção dos salários for menor que o índice de inflação, ao final do Mês 1, uma pessoa somente conseguirá comprar uma parte dos produtos da sua cesta básica.

Nos cálculos da atividade anterior, foi observado também que o índice de inflação pode ser diferente para cada família, ainda que elas tenham perfis muito próximos. No entanto, existe um índice de inflação que poderia ser aplicado a todas as pessoas.

Portanto, a variação dos preços que é relevante para uma pessoa ou empresa não é necessariamente a mesma que foi calculada pelas instituições responsáveis; os índices que medem a inflação são muito gerais, ou seja, não consideram a real variação de preços para cada caso em particular.

Além disso, esses índices variam de acordo com a instituição que fez a pesquisa, pois, para cada uma delas, um determinado conjunto de produtos e serviços diferentes é considerado. Por exemplo, a taxa de inflação do mês de julho de 1995 correspondia a 2,24% segundo o IGP-FGV (Índice Geral de Preços da Fundação Getúlio Vargas); de acordo com o ICV-Dieese (Índice de Custo de Vida do Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos), 4,29%. Logo, a variação observada em relação a procedimentos estatísticos distintos evidencia um grande desafio para os economistas: o estabelecimento de um único índice de inflação que possa ser generalizado para toda a sociedade.

Assim, é possível entender por que há tanta discussão entre patrões e empregados quanto à questão dos índices de reajustes salariais.

Etapa 6 – Calculando a inflação real

Os estudantes concluíram que o custo da cesta básica varia de família para família, pois as famílias consomem produtos diferentes e em quantidades diferentes. Além disso, os produtos sofrem diferentes variações de preços. Por isso, nesta etapa, cada grupo deverá calcular se houve ou não inflação de preços de um mês para outro, em relação ao valor da cesta básica.

Inicialmente, cada grupo determinará os itens da sua cesta básica: alimentos; passagens de ônibus, metrô ou trem; artigos de limpeza, higiene e farmácia; e valores gastos com lazer. A cesta básica deverá ser a mais realista possível. Por exemplo, se citarem gastos com cinema, é importante lembrá-los de que ninguém vai ao cinema todos os dias; se mencionarem a compra de eletrônicos, vale observar que esses itens não devem fazer parte da cesta, pois não é comum a compra de mesmo tipo de eletrônico dois meses seguidos. Cada grupo deve chegar a um consenso em relação aos serviços e produtos a consumir. Em seguida, cada integrante do grupo deve indicar a quantidade dos itens consumidos em suas respectivas casas. Convém sugerir o cálculo da média dos diferentes valores fornecidos pelas pessoas do grupo. Eles devem registrar o preço dos itens em dois momentos distintos e nos mesmos estabelecimentos comerciais: em um dia inicial qualquer e, num segundo momento, 31 dias mais tarde. Depois, deve ser calculada a inflação média, levando em conta os índices de todos os grupos da classe.

Finalmente, os estudantes devem pesquisar a taxa de inflação oficial adotada pelo Ministério da Fazenda e segundo outras instituições ou fundações como a FGV e o Dieese, por exemplo. Esses índices devem ser comparados com os índices dos grupos e com o índice médio de toda a turma. Gráficos devem ser construídos para organizar essas informações de modo a favorecer tais comparações.

Ampliação da atividade

Você, professor, pode aproveitar esta Atividade para aprofundar algumas noções de estatística: diferentes tipos de variáveis (qualitativa nominal, qualitativa ordinal, quantitativa discreta, quantitativa contínua) e diferentes tipos de gráficos.

Sugira a utilização de uma planilha eletrônica para a organização dos dados, a realização de cálculos, a construção de diferentes gráficos estatísticos e a obtenção das medidas de tendência central e de dispersão (se for o caso).

Sabe-se que o uso de planilhas, uma ferramenta de grande utilidade hoje em dia, é uma exigência fundamental para a obtenção de muitos empregos. Assim, uma vez que esta Atividade constitui uma oportunidade para a aprendizagem do uso de planilhas, a escola contribuirá não apenas para melhor compreensão dos estudantes acerca das noções matemáticas envolvidas, mas também para a construção de um conhecimento que lhes poderá ser muito útil em suas vidas profissionais. Daí a relevância social da atividade.

Convém ressaltar ainda que as atividades descritas neste tema envolvem investigações de conceitos e procedimentos, não apenas no domínio da Matemática, mas também no âmbito de outras áreas – por exemplo, Geografia, História e Economia. Trata-se, portanto, de projeto de natureza, evidentemente, interdisciplinar. Por esse motivo, seria interessante e desejável (mas não obrigatório) que professores de outras áreas também se integrassem a ele.

É necessário assumir uma "atitude interdisciplinar", compreendendo que o contexto oferecido é potencialmente rico para que os estudantes apliquem, aprofundem e investiguem conhecimentos matemáticos, utilizando-os inclusive como ferramentas para a compreensão de noções da Economia, por exemplo. A consulta a livros e a portais confiáveis da internet pode auxiliar nesta tarefa.

A pesquisa realizada na Etapa 6 pode ser ampliada e enriquecida. Os estudantes podem considerar outros itens para a composição da cesta básica ou até escolher outro tema para ser pesquisado. Em uma feira de ciências, após a necessária preparação, cada grupo poderia apresentar os resultados de sua pesquisa no quadro expositor de aço, promovendo uma discussão com os visitantes e com a comunidade escolar, por exemplo, sobre os resultados encontrados e a metodologia usada para a obtenção dos índices.

TEMA 2: ESTABELECENDO RELAÇÕES ENTRE CLASSES DIFERENTES DE POLIEDROS

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nas atividades a seguir, os estudantes devem fazer investigações para ampliar e aprofundar conhecimentos geométricos já construídos e/ou em construção, sobretudo os relativos à geometria espacial, com especial atenção para os seguinte tópicos:

- retomar as classificações de poliedros e corpos redondos;
- identificar poliedros convexos e não convexos;
- identificar prismas, pirâmides e poliedros que não são prismas nem pirâmides;
- investigar relações entre o número de vértices, de arestas e de faces e o número de lados do polígono da base;
- investigar as relações existentes entre faces, arestas e vértices de poliedros convexos.

Tema

Geometria.

Conteúdos envolvidos

Congruência de polígonos; sólidos geométricos: classificação em corpos redondos e poliedros; poliedros: classificação em convexos e não convexos, classificação em prismas, pirâmides e outros (que não são prismas nem pirâmides); relações de poliedros.

Habilidades

Reconhecer e nomear um prisma; relacionar elementos geométricos e algébricos; visualizar figuras espaciais no plano; classificar poliedros; sintetizar e generalizar fatos obtidos de forma concreta, como as relações existentes entre faces, arestas e vértices de poliedros convexos.

Número de aulas

4 aulas.

Série

Esta Atividade é indicada para a 2ª série do Ensino Médio. Todavia, ela pode ser proposta aos estudantes da 1ª ou da 3ª série, dependendo da programação da escola, pois ela envolve o estudo de poliedros e corpos redondos, tema cujo estudo deve ter sido iniciado no Ensino Fundamental. Por esse motivo, algumas etapas dessa sequência podem não ser desenvolvidas, conforme os conhecimentos prévios dos estudantes.

COMO INVESTIGAR O PROBLEMA?

Execução da atividade experimental

Organize a turma em grupos de, no máximo, cinco estudantes e entregue folhas, réguas, esquadros e compassos para a construção de figuras ou para os registros solicitados nas atividades. Distribua a planificação de alguns sólidos para montagem. Disponibilize massinha, ou "massinha macia" em barras, e fios de náilon, caso os estudantes considerem necessária a realização de recortes durante as atividades. Cabe ressaltar, no entanto, que a Etapa 1 é uma retomada de conceitos que em geral são desenvolvidos no Ensino Fundamental. Assim, se os estudantes já dominam as noções envolvidas, é conveniente passar para a Etapa seguinte.

Material necessário

Conjunto de sólidos geométricos planificados para montagem; conjunto de sólidos geométricos em acrílico; material para construção de figuras geométricas; massinha e fio de náilon; folhas de papel.

Procedimentos a ser adotados

Etapa 1 – Classificação para os sólidos geométricos

Nesta etapa, serão mobilizados os conhecimentos prévios de cada grupo sobre figuras geométricas, tendo em vista que o trabalho com sólidos geométricos, envolvendo classificações e identificação de propriedades, foi previsto para ser desenvolvido ao longo do Ensino Fundamental.

Em seguida, com a classificação dos sólidos, são retomadas as características que diferenciam os corpos redondos dos poliedros.

Solicite inicialmente aos estudantes que montem os sólidos a partir das planificações do kit conjunto de sólidos geométricos planificados para montagem, disponível no laboratório de matemática. Depois disso, acrescente a esse conjunto os sólidos geométricos em acrílico, também existentes no laboratório. Todos esses sólidos podem ficar disponíveis sobre uma mesa, para que os grupos se revezem entre oportunidades de manipulação das figuras e observação de suas características específicas. Em seguida, solicite aos estudantes que realizem as seguintes atividades.

Atividade 1:

- Separe os sólidos que estão sobre a mesa em dois grupos ou mais, segundo um critério estabelecido por seu grupo.

Com base nos critérios de classificação que serão escolhidos pelos grupos de estudantes, é possível, por exemplo, que sejam colocados em uma mesma classe os seguintes sólidos geométricos: as pirâmides, os cones e os octaedros. Os estudantes poderão agrupar esses três tipos de sólidos em uma mesma categoria porque eles são "pontudos".

Em outra classificação, os estudantes poderiam, por exemplo, agrupar os sólidos colocados sobre a mesa, ou seja, aqueles sólidos que podem ser apoiados em uma superfície plana. Neste caso, o cilindro, as pirâmides, o octaedro e os prismas pertenceriam à mesma classe.

Espera-se que, após a discussão e sistematização em sala de aula a respeito dos diversos critérios estabelecidos pelos estudantes, você promova uma discussão de modo que percebam que os sólidos apresentados podem ser classificados em corpos redondos e poliedros.

É provável que os estudantes também classifiquem os poliedros em prismas, pirâmides e outros.

Além disso, eles podem verificar que há características comuns entre alguns corpos redondos (cilindros e cones) e alguns poliedros (prismas e pirâmides): ter uma base plana.

Esta classificação deve ficar mais clara para os estudantes na Atividade 2.

Atividade 2:

Nesta Atividade, você pode fornecer os sólidos geométricos aos grupos de estudantes, de tal forma que cada grupo tenha à sua disposição alguns poliedros e alguns corpos redondos. Outra possibilidade é dividir os sólidos em dois conjuntos e estabelecer um rodízio entre os grupos. Solicite, então, que resolvam a sequência a seguir.

1. Responda às seguintes perguntas:

a) Imagine um prisma de base hexagonal e responda à pergunta: Qual é o menor número de cores que você pode usar para pintar as faces desse prisma de modo que duas faces vizinhas não apresentem a mesma cor? E se o prisma tiver base pentagonal? Faça suas conjecturas. Em seguida, isole esse prisma do conjunto dos outros sólidos e investigue se suas conjecturas estavam corretas.
Três cores (base hexagonal). Quatro cores (base pentagonal).

b) Agora, considere um prisma que não pertence às classes de sólidos disponíveis, por exemplo, um prisma cuja base é um polígono de 12 lados. Qual é o número mínimo de cores para que duas faces vizinhas não tenham a mesma cor? E se esse prisma tivesse como base um polígono de 13 lados?
Três cores (12 lados). Quatro cores (13 lados).

c) E se, nos itens **a** e **b**, houvesse pirâmides em vez de prismas? Quantas cores seriam necessárias em cada caso?
Todas as faces laterais têm um ponto em comum: o vértice oposto à base. Nesse caso, o grupo deve decidir se esse fato torna ou não todas as faces vizinhas. Em caso afirmativo, cada face deve ter uma cor diferente. Se o grupo decidir que faces vizinhas são as que têm necessariamente uma aresta em comum, a resposta seria a mesma dada no caso dos prismas.

2. Responda às questões a seguir:

a) Qual é a relação entre o número de lados do polígono da base de um prisma e o número de arestas desse prisma? E a relação dessa base com o número de faces do prisma?
b) Qual é a relação entre o número de lados do polígono da base de uma pirâmide e o número de arestas dessa pirâmide? E a relação da base com o número de faces da pirâmide?

3. Imagine que você possa fazer uma secção em cada um dos sólidos analisados por seu grupo. Após essa secção, como seria a superfície definida pelo corte de cada figura? Desenhe essa superfície.

É importante que você incentive os estudantes a realizar (mentalmente) mais do que um corte em cada figura, para que eles percebam certas regularidades nas superfícies de corte: nos poliedros, elas devem ser secções poligonais; nos corpos redondos, com exceção de um ou outro recorte, elas devem apresentar linhas curvas.

Caso você considere necessário, poderiam ser disponibilizadas massinhas e fios de náilon, pois, assim, os estudantes poderiam reproduzir sólidos, realizar recortes, verificar, confirmar ou refutar suas suposições a respeito da forma obtida após a secção de algum dos sólidos disponíveis. Os estudantes poderiam procurar na internet imagens desses cortes.

Outra estratégia para esclarecer a distinção entre poliedros e corpos redondos consiste no exercício de fazer conjecturas sobre a figura que poderia resultar, marcada sobre uma folha de papel, caso os estudantes utilizassem cada um dos sólidos como um carimbo. Nesse caso, qualquer poliedro "sujo" de tinta, quando apoiado sobre a folha, deixaria uma marca poligonal. Quanto aos corpos redondos, se "sujos" de tinta quando apoiados sobre a folha, deixariam como marcas, por exemplo: apenas um ponto (no caso da esfera), ou um segmento de reta ou um círculo (nos casos do cone e do cilindro).

Com esta Atividade, espera-se que os estudantes consigam classificar os sólidos geométricos disponíveis em corpos redondos e em poliedros.

Etapa 2 – Classificação para os poliedros

Esta etapa tem por finalidade apresentar e classificar novas figuras geométricas, a fim de que os estudantes identifiquem diferenças entre poliedros convexos e poliedros não convexos.

Para o desenvolvimento desta atividade, você pode disponibilizar para observação e manipulação apenas os sólidos classificados como poliedros, que foram utilizados durante a atividade anterior. Eles deverão analisar as diferenças e fazer conjecturas sobre a classificação entre convexos e não convexos.

Peça aos estudantes que comparem os sólidos geométricos que estão sobre a mesa com as figuras representadas a seguir. Em seguida, que registrem em sua folha as semelhanças e diferenças observadas.

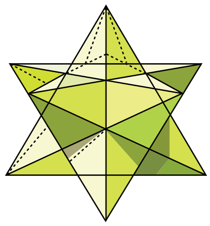
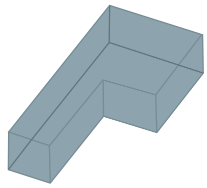
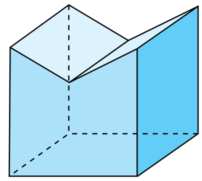
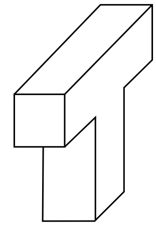
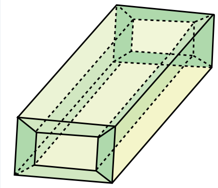
				

Figura 1.	**Figura 2.**	**Figura 3.**	**Figura 4.**	**Figura 5.**

É importante que você estimule os estudantes a explicitar suas observações durante a comparação entre as figuras impressas no papel e os sólidos disponibilizados.

Além disso, espera-se que os estudantes percebam que os sólidos representados anteriormente também são poliedros.

Caso este conteúdo ainda não tenha sido tratado com a turma, ou caso os estudantes não se recordem das características que determinam a convexidade (ou não) de um poliedro, você pode sugerir que imaginem um plano cortando uma das faces de um poliedro não convexo, para observar a disposição das demais faces do poliedro em relação a esse plano, conforme ilustra a Figura 6:

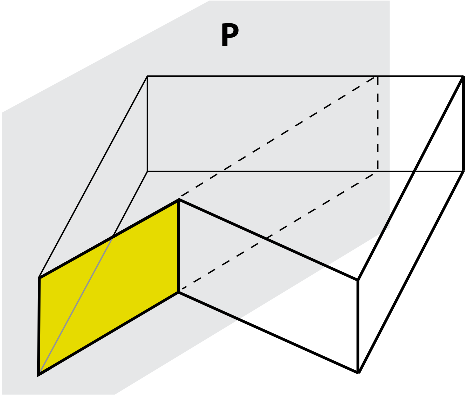


Figura 6.

Você pode também esclarecer que o plano que contém a face pintada em amarelo intersecta a figura, deixando em um semiespaço uma parte da figura e, no outro semiespaço, a outra parte da figura; ou seja, as faces do poliedro não estão todas contidas num mesmo semiespaço, considerado o plano que contém a face amarela. Portanto, trata-se de um **poliedro não convexo**.

Já que apresentam a mesma característica descrita anteriormente, as demais figuras também constituem poliedros não convexos.

Por outro lado, no que se refere ao **poliedro convexo**, a conclusão dos estudantes deveria ser a seguinte: se um plano seccionar uma face qualquer desse poliedro, todas as demais faces estarão contidas num mesmo semiespaço. Pode-se acrescentar que, em qualquer poliedro convexo, duas faces nunca estão contidas em um mesmo plano e cada um dos lados de um polígono (face do poliedro) é comum a apenas duas faces.

Logo, todos os poliedros disponíveis para manipulação são poliedros convexos.

Etapa 3 – Uma classificação para os poliedros convexos

Esta Atividade tem como objetivo retomar as ideias desenvolvidas anteriormente, investigar semelhanças e diferenças entre os poliedros convexos observados e apresentar sua classificação em prismas, pirâmides e outros poliedros que não são prismas nem pirâmides.

Vale observar que é desejável que um grupo de cada vez possa analisar o conjunto de poliedros convexos, para estabelecer sua classificação.

Atividade 3:

Peça aos estudantes que realizem a sequência a seguir.

- Investigue as semelhanças e as diferenças entre os poliedros convexos que estão sobre a mesa. Registre-as na folha. Em seguida, discuta com seu grupo os critérios para uma classificação desses poliedros, com base nas características observadas.

Esta Atividade deve resultar na identificação de características que diferenciam prismas de pirâmides. Por exemplo: a forma das faces laterais dos prismas e das pirâmides; as propriedades das bases dos prismas e das pirâmides; a distinção entre prismas e pirâmides retos ou oblíquos; a relação entre o número de faces laterais e o número de lados do polígono das bases etc.

Devem ser discutidas também as características que diferenciam, por um lado, prismas e pirâmides, e, por outro, aqueles poliedros que não são prismas nem pirâmides, o que exigirá, portanto, uma outra classe de poliedros.

Ademais, serão retomadas noções relativas aos polígonos, tais como características dos polígonos regulares, condições necessárias para que dois polígonos sejam considerados congruentes etc.

Etapa 4 – Que propriedades são comuns a todos os poliedros?

Esta etapa tem como objetivo, com base na observação e na contagem de elementos característicos dos poliedros (faces, vértices e arestas), investigar relações entre poliedros convexos e não convexos e relações entre prismas, pirâmides e outros poliedros convexos (que não são pirâmides nem prismas). Mais uma vez, é necessário recuperar os conhecimentos que os estudantes já têm sobre essas relações.

Espera-se que os estudantes possam generalizar propriedades dos poliedros convexos, concluindo, por exemplo, que, em qualquer prisma, o número de vértices é igual ao dobro do número de lados do polígono da base ou que, em qualquer pirâmide, o número de vértices é igual ao número de lados do polígono da base acrescido de 1 unidade. Peça, então, que realizem a Atividade 4.

Atividade 4:

- Complete a tabela a seguir, considerando o número de vértices (V), faces (F) e arestas (A) dos poliedros disponíveis. (*Observação*: n corresponde ao número de lados do polígono da base nos prismas e nas pirâmides.)

	Poliedros convexos														
n	Prismas			Pirâmides			Octaedro regular			Dodecaedro regular			Icosaedro regular		
	V	F	A	V	F	A	V	F	A	V	F	A	V	F	A
3	*6*	*5*	*9*	*4*	*4*	*6*									
4	*8*	*6*	*12*	*5*	*5*	*8*									
5	*10*	*7*	*15*	*6*	*6*	*10*									
6	*12*	*8*	*18*	*7*	*7*	*12*									
7	*14*	*9*	*21*	*8*	*8*	*14*									
8	*16*	*10*	*24*	*9*	*9*	*16*									
9	*18*	*11*	*27*	*10*	*10*	*18*									
10	*20*	*12*	*30*	*11*	*11*	*20*	*6*	*8*	*12*	*20*	*12*	*30*	*12*	*20*	*30*
11	*22*	*13*	*33*	*12*	*12*	*22*									
12	*24*	*14*	*36*	*13*	*13*	*24*									
13	*26*	*15*	*39*	*14*	*14*	*26*									
14	*28*	*16*	*42*	*15*	*15*	*28*									
15	*30*	*17*	*45*	*16*	*16*	*30*									
...	...	...	...	...	...	...									
n	*2n*	*n + 2*	*3n*	*n + 1*	*n + 1*	*2n*									

Tabela 4.

Além da generalização das propriedades relativas ao número de vértices, faces e arestas nos prismas e nas pirâmides, os estudantes também devem concluir que V + F = A + 2. Denominada como **Relação de Euler**, tal propriedade caracteriza todos os poliedros convexos.

Esta é uma ocasião oportuna para que você esclareça que essa relação é válida para todos os poliedros convexos, embora não seja apresentada aqui uma justificativa formal dessa propriedade, pois tal demonstração formal envolve conhecimentos que não foram estudados.

Por fim, a atividade a seguir complementa esta investigação, oferecendo a oportunidade para que os estudantes percebam que os poliedros não convexos "não se comportam" como os convexos, visto que suas características (número de vértices, faces e arestas) nem sempre satisfazem à *Relação de Euler*.

Atividade 5:

- Complete a tabela, considerando o número de vértices (V), faces (F) e arestas (A) dos poliedros não convexos representados pelas figuras a seguir:

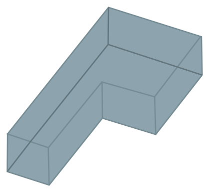


Figura 7.

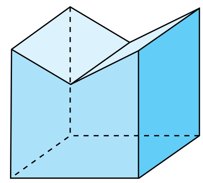


Figura 8.

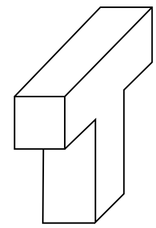


Figura 9.

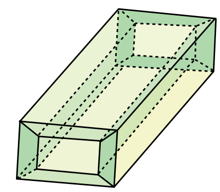


Figura 10.

Poliedros não convexos											
Figura 7			Figura 8			Figura 9			Figura 10		
V	F	A	V	F	A	V	F	A	V	F	A
12	*8*	*18*	*10*	*7*	*15*	*16*	*10*	*24*	*16*	*16*	*32*

Tabela 5.

A verificação da *Relação de Euler* para essas figuras indicará que a Figura 10 tem 16 vértices, 16 faces e 32 arestas e, assim, não fica validada essa relação para esse poliedro.

Com esta Atividade, os estudantes devem concluir que a *Relação de Euler* é válida para todos os poliedros convexos, mas não vale para todos os não convexos.

Com relação às pirâmides, espera-se que os estudantes cheguem às seguintes conclusões: o número de faces é igual ao número de vértices; o número de faces é igual ao número de lados do polígono da base acrescentado de 1 unidade; o número de arestas é igual ao dobro do número de lados do polígono da base.

Sobre os prismas, devem concluir que: o número de faces é igual ao número de lados do polígono da base acrescentado de 2 unidades; o número de arestas é igual ao triplo do número de lados do polígono da base; o número de vértices é igual ao dobro do número de lados do polígono da base.

TEMA 3: DESCOBRINDO UMA ESTRATÉGIA PARA DETERMINAR O VOLUME DE PIRÂMIDES

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Por meio das atividades a seguir, serão retomados e aprofundados conhecimentos geométricos já construídos e/ou em construção, sobretudo os relativos à geometria espacial. Com base na investigação de prismas retos (de base triangular e de base quadrada), proporciona-se aos estudantes a oportunidade de investigar estratégias que culminem na elaboração de uma fórmula para determinar o volume de uma pirâmide qualquer.

Tema

Geometria espacial.

Conteúdos envolvidos

Identificação de prismas e pirâmides; identificação de vértices, faces, arestas, diagonais (das faces e dos prismas); identificação de figuras congruentes; cálculo do volume de um prisma reto; cálculo do volume de pirâmide.

Habilidades

Reconhecer e nomear um prisma e uma pirâmide; relacionar elementos geométricos e algébricos em pirâmides; visualizar prismas e pirâmides no plano; compreender o processo de obtenção da fórmula para calcular o volume de uma pirâmide; sintetizar e generalizar fatos obtidos de forma concreta.

Número de aulas

4 aulas.

Série

Esta Atividade é indicada para a 2ª série do Ensino Médio. Todavia, ela pode ser proposta aos estudantes da 1ª ou da 3ª série, a depender do currículo da escola, pois a atividade envolve o volume de prismas, tema cujo estudo deve ter sido iniciado no Ensino Fundamental.

COMO INVESTIGAR O PROBLEMA?

Execução da atividade experimental

Divida a turma em grupos de, no máximo, cinco estudantes e entregue jogos de varetas suficientes para a realização das atividades. Disponibilize também folhas, réguas, esquadros e compassos para os registros solicitados na atividade.

Material necessário

Conjunto para construção de poliedros (conjunto para a montagem de poliedros composto por hastes com extremidades imantadas e esferas); conjunto de poliedros em acrílico; massinha em pedra e fio de náilon; instrumentos para a construção geométrica de figuras; folha de papel e régua.

Procedimentos a ser adotados

Etapa 1 – Calculando o volume de um prisma

Esta etapa tem por objetivo retomar algumas noções já construídas: congruência de figuras geométricas; características de um prisma; volume do prisma. Além disso, pretende fornecer elementos necessários para o desenvolvimento das etapas seguintes, nas quais serão estabelecidas relações entre prismas e pirâmides. Todavia, antes de iniciar a atividade, retome os conhecimentos prévios dos estudantes. Caso esses conceitos já estejam dominados por eles, tal etapa poderá ser dispensada.

Atividade 1:

1. Utilizando o material de varetas, construa o "esqueleto" de um prisma reto de base quadrada (paralelepípedo retângulo) com suas diagonais. Em seguida, determine o volume do prisma representado por meio desse "esqueleto". Registre um esboço da figura na folha, indicando faces, arestas, vértices e diagonais, as medidas e os cálculos que você fez, para obter o resultado.

2. Como você faria para seccionar o prisma da Atividade 1 em dois prismas congruentes?

Os estudantes podem obter dois prismas de base quadrangular, com a mesma altura do prisma original, dois prismas de base triangular, com a mesma altura do prisma original, ou dois prismas de base quadrangular, seccionando o prisma paralelamente às bases.

3. Como você faria para seccionar o prisma da Atividade 1 em três prismas congruentes? Calcule o volume de cada um dos prismas.

Neste caso, os estudantes podem obter três prismas de base quadrangular com a mesma altura do prisma original, ou três prismas de base quadrangular, cuja altura tenha medida igual a $^1/_3$ da medida da altura do prisma original.

É importante que você estimule os estudantes a explicitar as características dos poliedros obtidos, utilizando a nomenclatura adequada e indicando as particularidades dos prismas.

Etapa 2 – O volume de uma pirâmide

Esta etapa tem por finalidade estabelecer relações entre as propriedades dos prismas e as propriedades das pirâmides, além de mobilizar os conhecimentos utilizados na Etapa 1 para iniciar uma discussão sobre estratégias para o cálculo do volume da pirâmide.

Atividade 2:

1. Utilizando seu jogo de varetas, construa o "esqueleto" de uma pirâmide de base quadrada, que tenha a mesma altura do prisma construído na Etapa 1. Em seguida, elabore uma estratégia para calcular o volume dessa pirâmide.

Como resultado desta etapa, é provável que sejam construídas pirâmides retas com as quatro arestas laterais congruentes.

Se algum grupo apresentar pirâmides que tenham uma das arestas laterais perpendicular à base, com o mesmo comprimento da aresta lateral do prisma construído na Etapa 1, você pode sugerir que o grupo compare essa pirâmide com o prisma (Etapa 1, Atividade 1), indicando semelhanças e diferenças, ou estabelecendo alguma relação entre os dois poliedros.

Os estudantes devem observar se: nessas pirâmides, a base e a altura são congruentes, respectivamente, à base e à altura do prisma (Etapa 1, Atividade 1); as duas arestas laterais da pirâmide correspondem às diagonais das faces laterais do prisma e a aresta lateral restante da pirâmide corresponde a uma das diagonais do prisma.

Caso os estudantes cheguem a essas conclusões, você pode ainda sugerir que investiguem quantas pirâmides de base quadrangular poderiam ser obtidas por meio de recortes do prisma (Etapa 1, Atividade 1).

A etapa seguinte permite que os estudantes percebam a importância da relação entre prismas e pirâmides, para a determinação do volume das pirâmides.

Neste experimento, os estudantes utilizarão fios de náilon para efetuar cortes em massinhas, a fim de obter, inicialmente, um cubo e, em seguida, subdividi-lo em pirâmides congruentes. Solicite aos estudantes que resolvam as atividades da Etapa 3.

Etapa 3 – Investigando um procedimento para determinar o volume de uma pirâmide

Parte 1

1. Como você faria para cortar um cubo em três pirâmides congruentes?

Esta etapa tem por objetivo provocar a discussão do grupo sobre as possibilidades de secção de um cubo em três pirâmides congruentes. Nesta fase, os estudantes elaborarão conjecturas a respeito da subdivisão do cubo, provavelmente fazendo tentativas com o auxílio do jogo de varetas, para representar as possíveis pirâmides a serem obtidas.

Você também pode solicitar aos estudantes que representem, na folha de papel, o cubo e cada uma das pirâmides obtidas, indicando as faces, as arestas, as diagonais das faces e as diagonais do cubo. A indicação desses elementos favorecerá a observação da congruência entre as pirâmides obtidas, além do desenvolvimento das próximas fases desta etapa.

2. Recorte uma barra de massinha com fio de náilon e construa um cubo.

3. Seccione esse cubo em três pirâmides de base quadrada.

4. Qual é o volume do cubo?

5. O que se pode afirmar a respeito do volume de cada uma dessas pirâmides?

Caso os estudantes encontrem dificuldades para seccionar o cubo em três pirâmides congruentes, de base quadrada, você pode oferecer o molde disponibilizado no kit ou apresentar a figura a seguir, para que obtenham as três pirâmides e verifiquem a possibilidade de formar o cubo.

Outra possibilidade, caso haja disponibilidade de tempo e interesse por parte dos estudantes, é a construção geométrica do molde da pirâmide.

Parte 2

1. Como você faria para seccionar um prisma reto de base triangular em três pirâmides?

O objetivo consiste em promover a discussão do grupo sobre as possibilidades de secção do prisma de base triangular (representado com varetas) em três pirâmides. Nesta fase, é possível que os estudantes tentem construir, com varetas, as três pirâmides que obteriam como resultado. Suas conjecturas podem ser investigadas com base no seguinte roteiro:

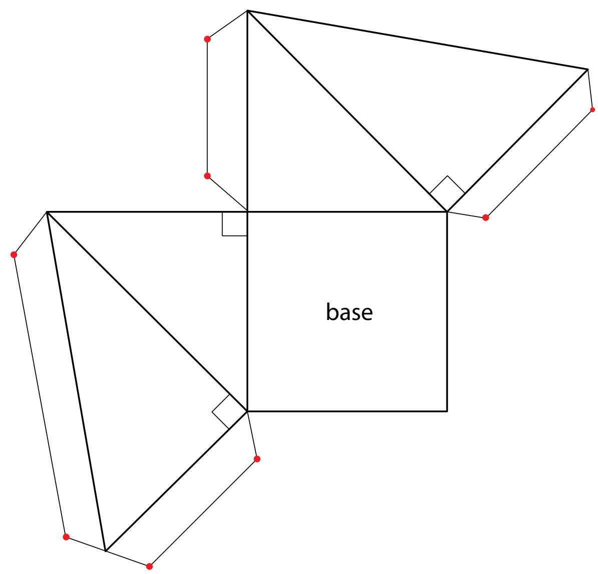


Figura 11.

a) Recorte uma barra de massinha com um fio de náilon para construir um prisma de base triangular.

b) Seccione esse prisma em três pirâmides de base triangular, realizando os recortes a partir de um único vértice.

c) O que se pode concluir sobre o volume de cada uma das pirâmides que você obteve?

Parte 3

Sistematização

Os estudantes devem perceber (visual ou intuitivamente) que as três pirâmides obtidas são congruentes. No entanto, nesse momento, é necessário que você apresente justificativas, uma vez que as características que garantem essa congruência não são tão evidentes como aquelas observadas nas pirâmides obtidas pela secção do cubo.

Por exemplo, você pode considerar o prisma de base triangular ABCDEF e representar o primeiro recorte pelo plano (A, C, E), conforme a Figura 12, para, em seguida, destacar os resultados desse recorte: a pirâmide de base triangular E(ABC) (Figura 13) e a pirâmide de base quadrangular E(ACFD) (Figura 14).

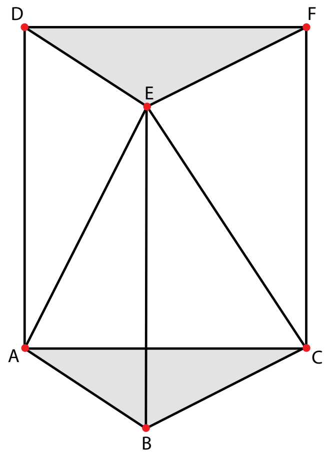


Figura 12.

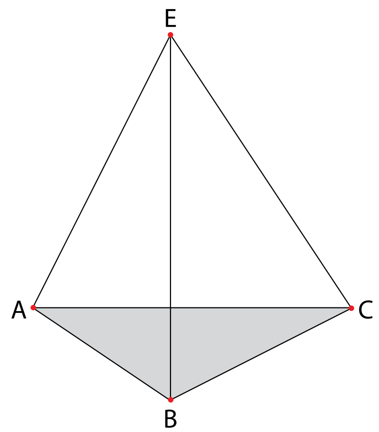


Figura 13.

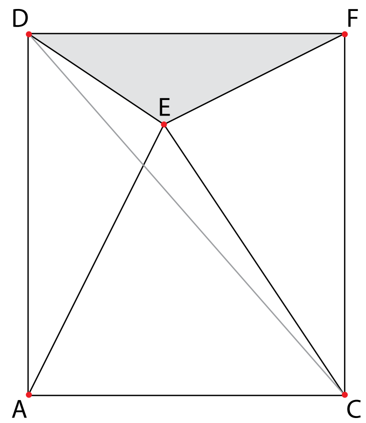


Figura 14.

Finalmente, considerando a pirâmide de base quadrangular (Figura 14), o recorte pelo plano (C, D, E) permite obter as duas outras pirâmides de base triangular solicitadas, ou seja, as pirâmides C(DEF) e E(ACD) representadas nas Figuras 15 e 16, respectivamente:

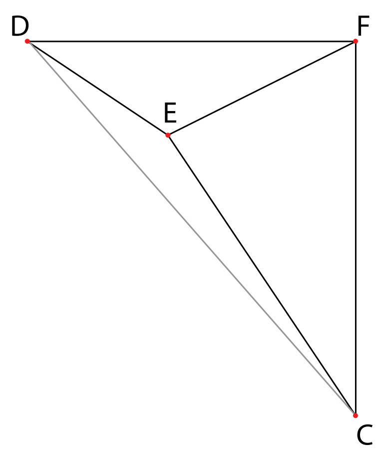


Figura 15.

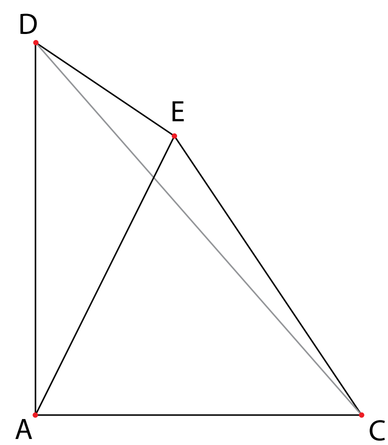


Figura 16.

As pirâmides das Figuras 13 e 15 são congruentes, porque têm bases congruentes (são as duas bases do prisma inicial) e arestas laterais congruentes. Logo, têm volumes iguais.

As pirâmides das Figuras 15 e 16 são congruentes, porque têm bases congruentes (são os triângulos CDF e ACD) e arestas laterais congruentes. Logo, também têm volumes iguais.

Assim, as três pirâmides obtidas têm volumes iguais e, então:

V (prisma de base triangular) = V (Figura 12) + V (Figura 13) + V (Figura 14) = 3 V (pirâmide de base triangular)

V (prisma de base triangular) = 3 · V (pirâmide de base triangular)

$$\text{V (pirâmide de base triangular)} = \frac{\text{Área da base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{\text{B} \cdot \text{h}}{3}$$

Etapa 4 – Essa regra vale para outras pirâmides?

Esta etapa tem por finalidade evidenciar que uma pirâmide P, cuja base tem n lados, pode ser seccionada em $(n - 2)$ pirâmides de base triangular, conforme a representação a seguir: $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_{n-2}$

Por exemplo, uma pirâmide de base heptagonal pode ser subdividida em cinco pirâmides menores, de base triangular, como mostra a Figura 17:

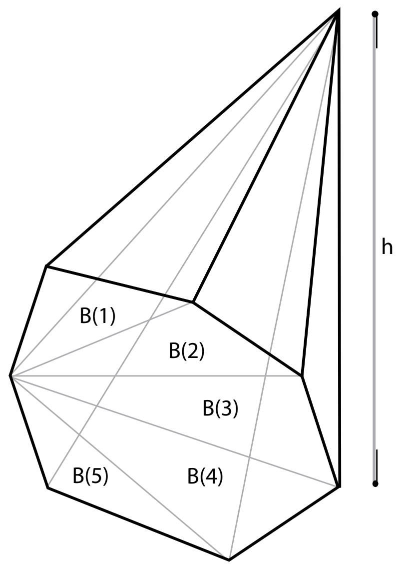


Figura 17.

Assim, tem-se:

$$\text{Volume (P)} = \text{V}(P_1) + \text{V}(P_2) + \text{V}(P_3) + \text{V}(P_4) + \text{V}(P_5) + \ldots + \text{V}(P_{n-2})$$

$$\text{Volume (P)} = \frac{B_1 h}{3} + \frac{B_2 h}{3} + \frac{B_3 h}{3} + \frac{B_4 h}{3} + \frac{B_5 h}{3} + \ldots + \frac{\text{B}_{n-2} \cdot \text{h}}{3}$$

$$\text{Volume (P)} = h \cdot \frac{(B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + \ldots + \text{B}_{n-2})}{3} = \frac{\text{B} \cdot \text{h}}{3}$$

A título de sugestão, em uma feira de ciências, os estudantes poderiam utilizar massinha e fios de náilon para orientar colegas de outras séries e visitantes sobre como obter a fórmula dos volumes de prismas e pirâmides. Nesse caso, seria desejável a realização de uma breve oficina com esse público.

TEMA 4: INVESTIGANDO ESTRATÉGIAS PARA DETERMINAR A ÁREA E O VOLUME DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Por meio das atividades a seguir, serão retomados e aprofundados conhecimentos geométricos já construídos e/ou em construção, sobretudo os relativos aos corpos redondos. Partindo da estratégia de obtenção de superfícies de revolução e de sólidos de revolução, será possível explorar situações que envolvam a área total e o volume do cilindro, do cone e da esfera.

Conteúdos envolvidos

Poliedros: cilindro, cone e esfera; congruência de figuras; área de figuras planas, área e volume de corpos redondos (cilindro, cone e esfera); identificação de figuras planas (poligonais ou circulares); identificação de corpos redondos (cilindro, cone e esfera); identificação de figuras congruentes; cálculo do volume de um prisma reto.

Habilidades

Fazer generalizações com sólidos de revolução por meio de experiências; visualizar e representar cones; enfrentar situações-problema que envolvam a identificação e os cálculos de áreas e volumes de cilindros, cones e esferas.

Número de aulas

4 aulas.

Série

Esta Atividade é indicada para a 3ª série do Ensino Médio. Todavia, ela pode ser proposta aos estudantes da 2ª série, a depender do currículo da escola, pois envolve o trabalho com corpos redondos, tema cujo estudo deve ter sido iniciado na 2ª série do Ensino Médio.

COMO INVESTIGAR O PROBLEMA?

Execução da atividade investigativa

Divida a turma em grupos de, no máximo, cinco estudantes e disponibilize varetas, pedaços de arame flexível, cartolina, cola, réguas, compassos, esquadros, transferidores e tesouras. Além disso, ofereça folhas para os registros solicitados nas atividades.

O conjunto de sólidos geométricos em acrílico poderia ficar disponível sobre uma mesa, para observação e manipulação por parte dos estudantes durante o desenvolvimento de todas as atividades propostas a seguir.

Material necessário

Aparelho que simula a obtenção de sólidos de revolução; conjunto de sólidos geométricos em acrílico; conjunto de sólidos geométricos planificados para montagem; varetas, pedaços de arame flexível, cola, fita adesiva e tesoura; régua, esquadro, transferidor e compasso; calculadoras; massinha em pedra e náilon; folhas de papel e cartolina.

Procedimentos a ser adotados

Etapa 1 – Identificando superfícies e sólidos de revolução

Esta etapa tem por objetivo obter e explorar figuras de corpos redondos (cilindro, cone e esfera) por meio de um experimento prático, estabelecendo semelhanças e diferenças entre superfícies de revolução e sólidos de revolução.

Figura 18. Aparelho denominado sólidos de revolução. Nele, há um eixo que gira rapidamente, permitindo a visualização de sólidos, quando nesse eixo estiver preso um polígono construído em cartolina/papelão.

Solicite aos estudantes que realizem as atividades a seguir.

1. Em cada item a seguir, observe que existe uma figura fixa em uma haste de metal. Supondo que essa haste gire rapidamente em torno de si mesma, realizando uma volta completa, desenhe no espaço em branco correspondente a figura obtida como resultado.

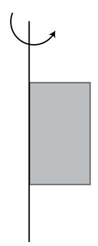
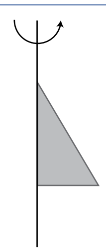
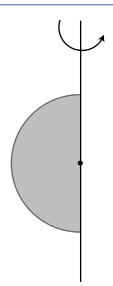
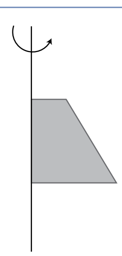
Figura original presa na haste de metal	Figura resultante da rotação em 360°
 Figura 19.	*Cilindro*
 Figura 20.	*Cone*
 Figura 21.	*Esfera*
 Figura 22.	*Tronco de cone*

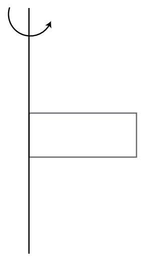
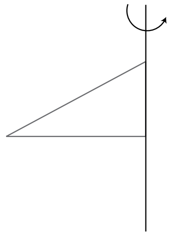
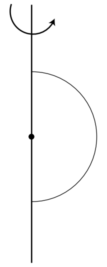
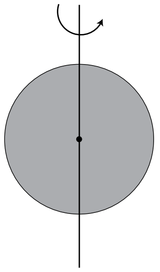
Figura original presa na haste de metal	Figura resultante da rotação em 360°
 Figura 23.	*Forma cilíndrica, porém oca*
 Figura 24.	*Forma cônica, porém oca*
 Figura 25.	*Forma esférica, porém oca*
 Figura 26.	*Esfera*

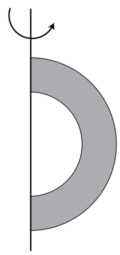
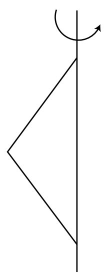
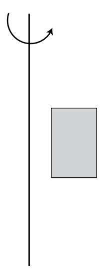
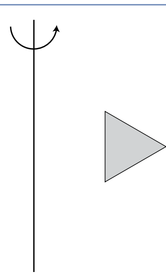
Figura original presa na haste de metal	Figura resultante da rotação em 360°
 Figura 27.	*Esfera oca, porém com uma camada espessa, como se uma esfera tivesse sido retirada do interior de uma outra esfera*
 Figura 28.	*Dois cones unidos pela base, porém ocos*
 Figura 29.	*Cilindro oco com camadas espessas na forma de pistão, como se um cilindro menor tivesse sido retirado do seu interior*
 Figura 30.	*Dois cones unidos pela base, como se um cilindro tivesse sido retirado de seu interior*

Tabela 6.

É importante que os grupos sejam incentivados a discutir os resultados obtidos, após a rotação das figuras (360° em torno do eixo). Posteriormente, os estudantes podem simular a rotação de algumas figuras, utilizando os materiais disponíveis de modo a validar ou refutar suas conjecturas.

A respeito das respostas apresentadas pelos estudantes, você poderia questionar se a figura resultante dessa rotação é plana ou espacial, se é oca ou sólida, se há um nome especial para essa figura, quais são suas características e propriedades.

A identificação das superfícies de revolução, obtidas das Figuras 23, 24, 25 e 28, pode favorecer a posterior discussão sobre a área total de alguns corpos redondos, por exemplo, o cilindro, o cone e a esfera, ou de figuras resultantes da composição de dois desses corpos (ou derivadas de sua modificação); também, o reconhecimento dos sólidos de revolução que são obtidos das demais figuras permite ao grupo a discussão sobre o volume desses mesmos corpos redondos.

Convém retomar os elementos que caracterizam os corpos redondos, sobretudo o cilindro, o cone, a esfera e figuras derivadas, além de noções relativas à circunferência e ao círculo, incluindo a determinação da medida de arcos e ângulos centrais e da área de setores circulares.

Uma vez que os conteúdos da Etapa 1 são a base para o desenvolvimento das demais etapas, é importante que os estudantes tenham sempre em mãos as figuras e suas anotações para consulta e verificação de suas conclusões.

Etapa 2 – Explorando noções relativas ao cilindro de revolução

Esta etapa tem como objetivo investigar as áreas das superfícies e do volume dos sólidos gerados por um retângulo que sofre uma rotação de 360° em torno de um eixo, com base nas Figuras 19, 23 e 29, analisadas e discutidas pelos estudantes.

Área da superfície do cilindro de revolução

1. Compare os desenhos que você fez em resposta às Figuras 19 e 23 com os sólidos geométricos que estão sobre a mesa.

A discussão sobre as Figuras 19 e 23 deve resultar na retomada da caracterização do cilindro como um corpo redondo em que se destacam suas bases circulares (paralelas e congruentes), suas geratrizes (oblíquas ou perpendiculares aos planos das bases), sua altura, seu eixo e sua secção meridiana. O reconhecimento desses elementos deve resultar na classificação entre cilindro reto e cilindro oblíquo e também na identificação do cilindro equilátero, cuja altura mede o dobro do raio dos círculos que formam suas bases.

Finalmente, se identificadas essas características nos sólidos obtidos por meio da revolução sugerida nas Figuras 19 e 23, os estudantes podem trabalhar com a noção de *cilindro de revolução*, isto é, um cilindro reto que pode ser obtido pela rotação de uma superfície retangular, em torno de uma reta que contém um de seus lados. Assim, esse lado do retângulo (contido na reta) tem a mesma medida da altura h do cilindro, enquanto o outro lado do retângulo tem medida igual ao raio r das bases do cilindro.

2. Considere o retângulo da Figura 19 com medidas 8 cm e 25 cm. Supondo que o cilindro obtido por essa rotação deva ser embalado com papel, e desconsideradas as abas necessárias à colagem, se essa embalagem for aberta, haverá uma planificação da superfície desse cilindro. Desenhe essa planificação em sua folha, recorte-a e represente a “casca” de um cilindro. Qual será aproximadamente a medida do papel necessário para essa tarefa?

Espera-se que a planificação desenhada pelos estudantes para o cilindro, seja composta por dois círculos (bases do cilindro) e um retângulo (superfície lateral do cilindro), com as medidas indicadas no enunciado. Sendo já conhecidas as figuras planas que compõem essa planificação, o cálculo da medida do papel necessário (área da superfície total do cilindro) necessitará dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre a área do retângulo e do círculo.

Esta Atividade pode ser o ponto de partida para uma discussão que resulte na elaboração da fórmula para o cálculo da área total da superfície do cilindro.

Generalizando, uma representação da planificação do cilindro de revolução poderia ser a seguinte:

> Na Figura 31, h é o lado do retângulo, fixo à haste de metal, e r é a medida do lado do retângulo, que não está fixo à haste de metal.

Assim, a área do cilindro de revolução poderia ser calculada pela soma das áreas das figuras que compõem essa planificação:

$$A_{total} = A_{retângulo} + 2 \cdot A_{círculo} \rightarrow 2\pi rh + 2\pi r^2 =$$
$$= 2\pi r \cdot (h + r)$$

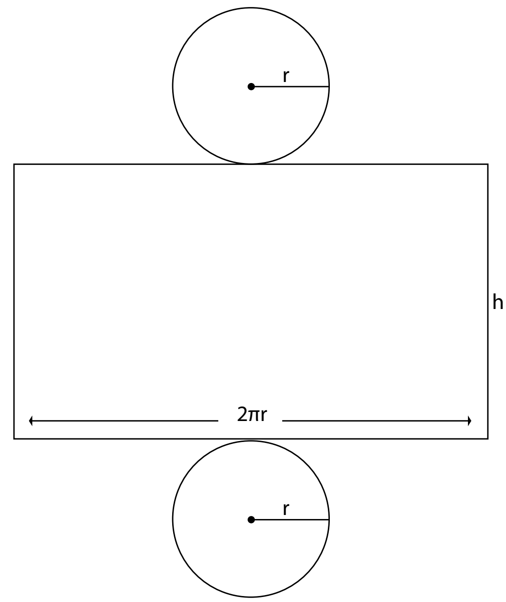


Figura 31.

Convém chamar a atenção dos estudantes para o resultado que seria obtido pela rotação da Figura 23 (linha poligonal), em 360° em torno da haste, que consistiria apenas na “casca” de um cilindro (uma superfície de revolução); portanto, nesse caso, seria mais apropriado falar sobre a planificação e determinar a área total.

Volume do cilindro de revolução

1. Como você faria para determinar o volume do cilindro de revolução obtido pela rotação da Figura 19?

Se os estudantes não estiverem familiarizados com o cálculo do volume de prismas, é conveniente fazer uma revisão do tema. Será retomado o mesmo raciocínio utilizado para o cálculo do volume do cilindro de revolução.

Inicialmente, você pode sugerir aos estudantes que imaginem um prisma de base quadrada inscrito no cilindro; em seguida, um prisma de base pentagonal inscrito nesse cilindro; na sequência, um prisma de base hexagonal, outro de base heptagonal etc. É importante explicitar que as bases desses prismas são polígonos regulares, até chegar à possibilidade de um prisma cuja base tivesse *n* lados iguais, inscrito nesse cilindro. Nesse caso, os estudantes podem intuir que o volume desse prisma e o volume do cilindro em que está inscrito têm valores muito próximos, concluindo, assim, que uma mesma fórmula poderia ser utilizada para o cálculo dos volumes desses dois sólidos; ou seja, V = área da base · altura.

Utilizando uma outra abordagem, você poderia calcular o volume do cilindro por meio de uma pilha de círculos idênticos, cuja área é conhecida. Nesse caso, o volume será igual ao produto da área desses círculos pela altura do cilindro. Isto é:

$$V_{cilindro} = \text{área do círculo} \cdot \text{altura}$$

$$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h$$

Após a apresentação da ideia de sólido de revolução por meio de experimentos com materiais concretos, a fim de ampliar a discussão, você poderia propor situações cuja solução dependesse da intuição, da imaginação e da abstração; ou seja, nesse momento, os estudantes seriam obrigados a enfrentar situações cuja solução não poderia ser simplesmente verificada na prática, conforme os problemas a seguir:

a) Que estratégias você usaria para calcular a área da superfície e o volume do sólido resultante da rotação em 360° da Figura 11?
Seja V_1 o volume do cilindro maior de altura 10 cm, cuja base tem raio 9 cm, obtém-se V_1 = 2.543,4 cm³.

b) Dado que o retângulo da Figura 11 tem medidas 10 cm e 6 cm e está a 3 cm de distância da haste, qual será o volume do sólido resultante da rotação desse retângulo, em 360°, em torno dessa haste?
Seja V_2 o volume do cilindro menor, formado pelo "vão" entre o retângulo e a haste, obtém-se V_2 = 252,6 cm³. O volume do sólido de revolução = $V_1 - V_2$ = 2.260,8 cm³.

Uma vez que o retângulo não está afixado no eixo, diferentemente das atividades anteriores, você poderia discutir com os estudantes a possibilidade de geração de outros sólidos de revolução por meio da rotação de um retângulo, em 360°, em torno de uma haste.

Espera-se, neste caso, que os estudantes percebam que o sólido resultante dessa rotação é um cilindro (raio = 9 cm e altura = 10 cm), de cujo centro foi retirado um outro cilindro (raio = 3 cm e altura = 10 cm).

Etapa 3 – Explorando noções relativas ao cone de revolução

Esta etapa, com base na discussão sobre as Figuras 20 e 24, tem por objetivo retomar noções já construídas sobre o cone, classificando-o como corpo redondo, em que se destacam os seguintes elementos: uma base circular (com centro em *o* e raio *r*), um vértice (*V*), as geratrizes (segmentos de reta que têm um extremo no vértice e outro extremo no círculo da base), a altura (distância entre o vértice e o plano que contém a base), o eixo (reta que passa pelo vértice e pelo centro da base).

1. Compare os desenhos que você fez para as Figuras 20 e 24 e os sólidos geométricos que estão sobre a mesa.

A identificação desses elementos nas figuras desenhadas e nos sólidos disponíveis permitirá também acrescentar observações sobre cones oblíquos (cujo eixo é oblíquo ao plano da base) e cones retos (cujo eixo é perpendicular ao plano da base); além disso, possibilitará a introdução da noção de cone de revolução: cone circular reto gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

Essas noções serão necessárias para o desenvolvimento das atividades seguintes, para as quais os estudantes poderão utilizar materiais de desenho geométrico (régua, compasso e transferidor), tesoura e fita adesiva.

As atividades a seguir têm o propósito de evidenciar a importância de conhecimentos algébricos para a resolução de situações-problema da Geometria e a necessária ampliação de seus conhecimentos sobre os sólidos geométricos para o enfrentamento de novos problemas.

A respeito da Figura 24, que corresponde apenas ao contorno de um triângulo, os estudantes deverão considerar que a figura gerada pela rotação em torno do eixo representa apenas a "casca" de um cone e, por isso, pode ser planificada e decomposta em figuras (planas) possivelmente estudadas anteriormente, o que permitirá a determinação de sua área.

Área da superfície total do cone de revolução

2. Use cartolina para construir a superfície de um cone cuja altura meça 8 cm e cuja base tenha raio de 9 cm.
A atividade é experimental e não exige que os estudantes utilizem fórmulas para construir a figura. Com base nas medidas dadas (altura = 8 cm e raio da base = 9 cm), pode-se obter um círculo de raio = 9 cm (base), um setor circular de raio ≅ 12 cm e ângulo central ≅ 270° (superfície lateral).

3. Construa, com cartolina, a superfície de um cone cuja geratriz meça 15 cm e cuja base tenha raio de 9 cm.
Da mesma forma, não se espera que os estudantes recorram a fórmulas para a obtenção desta figura. Seu experimento poderá, assim, resultar na obtenção de duas figuras que comporão a superfície cônica solicitada: um círculo de raio = 9 cm e um setor circular de raio = 15 cm (valor dado para a geratriz) e ângulo central ≅ 216°.

4. Construa a superfície total de um cone de altura 18 cm.
Neste caso, é dada apenas a medida da altura = 18 cm. Uma tabela construída com valores escolhidos e obtidos pelos estudantes pode promover a percepção de que este é um problema que admite infinitas soluções. Por exemplo:

Altura	*Raio da base escolhido pelos estudantes*	*Geratriz*	*Ângulo central do setor*
18 cm	*10 cm*	*≅ 20,6 cm*	*≅ 175°*
18 cm	*5 cm*	*≅ 18,7 cm*	*≅ 96°*
18 cm	*8 cm*	*≅ 19,7 cm*	*≅ 146°*
18 cm	*12 cm*	*≅ 21,6 cm*	*≅ 200°*
18 cm	*15 cm*	*≅ 23,4 cm*	*≅ 231°*

Tabela 7.

5. Construa a superfície total de um cone que tenha geratriz de 10 cm e altura de 10 cm.
Este problema não tem solução, pois a figura solicitada é impossível de ser construída, isto é, se há um triângulo retângulo em que um dos catetos mede 10 cm (altura) e a hipotenusa também mede 10 cm (geratriz), não se verifica a condição de existência do triângulo, em que o lado maior deveria ser menor do que a soma dos outros dois. Também não se verifica a relação de Pitágoras.

Essas atividades, por um lado, oferecem diferentes oportunidades para a prática da representação dos elementos do cone na construção das figuras que deverão compor a superfície desse sólido; por outro, provocam uma discussão sobre as possibilidades de construção de uma figura que tenha a forma cônica, com base em medidas conhecidas.

Por exemplo, para a construção da figura proposta na Atividade 4, os estudantes obterão resultados distintos, dependendo dos valores escolhidos para o raio da base ou para a geratriz. Cabe a você preencher uma tabela contendo a altura (18 cm) e os valores obtidos por medição (do raio e da geratriz) das figuras que foram construídas, para que a turma perceba como é possível obter diferentes figuras. É uma oportunidade para uma reflexão sobre problemas que têm apenas uma solução (Atividades 2 e 3), problemas que não têm uma única solução (Atividade 4) ou problemas que não têm solução (Atividade 5).

Vale também destacar, durante as considerações feitas sobre as soluções encontradas pelos estudantes, que situações como a proposta na Atividade 4 têm infinitas soluções (problema possível e indeterminado), uma vez que as medidas que ficam à escolha dos estudantes são representadas por números reais; ou seja, embora esta Atividade seja prática e envolva medições representadas por números racionais, certamente os estudantes irão encontrar números irracionais nos cálculos que farão para o trabalho com este conteúdo.

Essa discussão pode ser retomada durante o desenvolvimento das próximas atividades.

6. Desenhe quatro círculos de raio = 12 cm. Nestes círculos, construa ângulos centrais de 30°, 60°, 90° e 180°, formando setores circulares. Recorte esses setores e cole, para formar com cada um deles a superfície lateral de um cone.

Observação: convém pedir aos estudantes que deixem a aba de colagem além do setor, pois eles poderão cortar somente o setor e, em seguida, reduzi-lo na colagem.

Esta Atividade pretende favorecer o reconhecimento de que o comprimento do arco de um setor e o comprimento da circunferência que contém esse arco são proporcionais ao ângulo central correspondente a esse setor. Tal conceito permitirá a formalização de ideias relativas à determinação da área da superfície lateral do cone de revolução.

Sobre a superfície lateral de uma forma geométrica como a representada nas imagens da figura a seguir, os estudantes deverão perceber o seguinte:

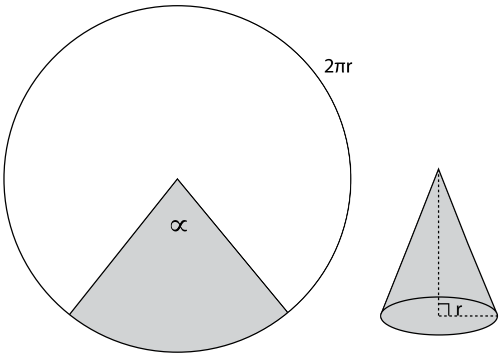


Figura 32.

- medidas dos ângulos centrais: $30° < 60° < 90° < 180°$;
- medidas dos raios das bases: $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$;
- comprimentos dos arcos dos setores: $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$;
- comprimentos das circunferências que contêm esses arcos: $2\pi g_1 < 2\pi g_2 < 2\pi g_3 < 2\pi g_4$ (dado que g, ao mesmo tempo, é a geratriz do cone e o raio do círculo que contém o setor circular que representa a superfície lateral do cone).

Assim, é possível afirmar que $\frac{2\pi r}{\alpha} = \frac{2\pi g}{2\pi}$, a partir do que se pode concluir que $\alpha = \frac{2\pi r}{g}$ radianos ou $\alpha = \frac{360r}{g}$ graus, conforme as figuras a seguir:

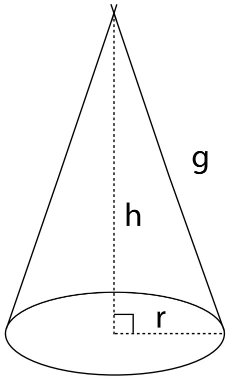


Figura 33.

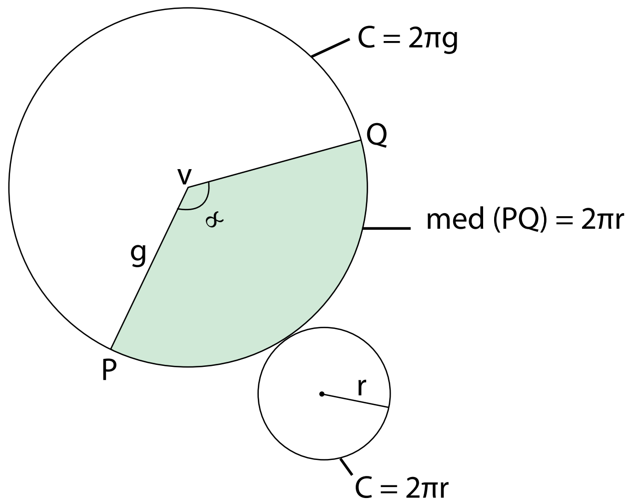


Figura 34.

Assim, pode-se escrever:

$\frac{2\pi r}{\alpha} = \frac{2\pi g}{2\pi}$, de onde se pode concluir que $\alpha = \frac{2\pi r}{g}$ radianos ou $\alpha = \frac{360r}{g}$ graus

Para a elaboração de uma fórmula que permita calcular a área da superfície lateral do cone, é preciso considerar o comprimento do arco e a área:

	Comprimento do arco	Área
Círculo maior (raio = g)	$2\pi g$	πg^2
Setor circular (superfície lateral do cone)	$2\pi r$	$Área_{superfície\ lateral\ do\ cone}$

Tabela 8.

Nesse caso, obtém-se: $Área_{superfície\ lateral\ do\ cone} = \frac{(2\pi r)\cdot(\pi g^2)}{2\pi g} = \pi rg$

Assim, a área total do cone é a soma da área do setor circular (superfície lateral) com a área do círculo (base):

$$Área_{superfície\ total\ do\ cone} = Área_{superfície\ lateral} + Área_{base} = Área_{setor\ circular} + Área_{círculo}$$

$$Área_{superfície\ total\ do\ cone} = \pi rg + \pi r^2 = \pi r \cdot (g + r)$$

Com base nessa formalização, as atividades propostas a seguir têm como objetivo estimular a construção de estratégias e retomar a discussão iniciada sobre situações que têm uma única solução, situações que podem ter infinitas soluções e outras que não admitem uma solução.

7. Use cartolina para construir a superfície total de um cone de altura = 12 cm, com base = 5 cm de raio. Qual é a área (aproximada) dessa superfície? Considere $\pi = 3{,}14$.
Área total da superfície cônica: 282,6 cm².

8. Construa a superfície de um cone com geratriz = 15 cm e raio = 6 cm. Determine a área dessa superfície. Considere $\pi = 3{,}14$.
Área total da superfície cônica: 395,64 cm².

9. Desenhe, em uma folha de papel sulfite, um setor circular com ângulo central = 120° e utilize-o como superfície lateral para construir um cone. Qual é, aproximadamente, a área do papel que você utilizou? Considere $\pi = 3{,}14$.
Por meio da aplicação da fórmula discutida anteriormente para o cálculo do ângulo central de um setor circular, os estudantes obterão $g = 3r$. Em seguida, utilizando a fórmula para determinar a área da superfície lateral de um cone, os estudantes poderão perceber que este problema também tem infinitas soluções, dependendo da medida escolhida para a geratriz da superfície cônica a ser construída. Por exemplo:

Geratriz (g)	*Raio da base (r)*	*Área da superfície lateral do cone*
15 cm	*5 cm*	*≅ 235,5 cm²*
12 cm	*4 cm*	*≅ 150,7 cm²*
18 cm	*6 cm*	*≅ 339,1 cm²*
19 cm	*≅ 6,3 cm*	*≅ 375,8 cm²*

Tabela 9.

10. Construa um cone que tenha geratriz = 10 cm e altura = 10 cm. Qual é a medida do papel necessário para construir esse cone?

A Atividade 10 repete, propositalmente, a construção proposta na primeira parte, como ocorre na Atividade 5, para que os grupos de estudantes possam justificar, formalmente, suas conclusões a respeito da impossibilidade de construir a superfície lateral de um cone com essas características.

As relações necessárias entre o ângulo central do setor e as medidas do raio, da altura e da geratriz de um cone exigidas para a realização destas atividades podem ser exploradas por meio de outros problemas que requerem a comparação entre os valores obtidos e uma investigação a respeito da maximização do uso do papel para a elaboração de uma figura. Sugere-se a seguinte atividade:

11. Usando uma folha quadrada de papel, de lado = 30 cm, uma pessoa deve desenhar a superfície total de um cone. A fim de descartar o mínimo possível de papel, quais devem ser as medidas desse cone?
Os estudantes devem levar em conta que, quanto maior for o ângulo central do setor que representa a superfície lateral do cone, maior será o raio da base. Poderiam ser investigados casos em que se tenha a maior medida para a geratriz. Por exemplo, para $g = 30$ cm e $\alpha = 90^o$, tem-se raio de 7,5 cm. Nesse caso, a área da superfície lateral do cone seria ≅ 706,5 cm² e a área da base seria ≅ 176,6 cm². A área total seria ≅ 883,1 cm², sobrando apenas 16,9 cm².

No entanto, após recortar o setor circular correspondente à superfície lateral do cone, os estudantes poderão perceber que o papel restante não é suficiente para obter um círculo de raio = 7,5 cm. Assim, as medidas consideradas inicialmente para o ângulo central e para a geratriz não permitem a obtenção da figura solicitada. Outras investigações poderiam ser realizadas pelos estudantes por meio de situações em que o arco do setor tangencia as bordas da folha quadrada, conforme os valores a seguir:

- g = 15 cm e $\alpha = 180°$
- g = 15 cm e $\alpha = 270°$
- g = 15 cm e $\alpha = 210°$

Finalmente, pode-se discutir com os estudantes sobre como gerar outros sólidos de revolução com base na justaposição de triângulos retângulos ou no recorte de triângulos retângulos, propondo as atividades seguintes:

12. Que estratégias você usaria para calcular a área da superfície de revolução resultante da rotação em 360° da Figura 28?
Poderia ser realizada uma secção da superfície de revolução por meio de um plano perpendicular à haste, passando pelo vértice do triângulo que não está fixado a essa haste, obtendo as superfícies laterais de dois cones. A soma das áreas dessas superfícies laterais seria a área total da superfície de revolução obtida pela rotação dessa figura.

13. A Figura 22 mostra um trapézio retângulo preso a uma haste de metal. O sólido de revolução gerado por essa figura é chamado de tronco de cone. Faça um desenho da planificação da superfície total desse tronco de cone e elabore uma estratégia que permita determinar sua área.
Os estudantes podem elaborar conjecturas sobre como completar o tronco de cone, formando um setor circular que represente a superfície lateral de um cone, o que pode sugerir a possibilidade de completar o trapézio retângulo dado, com a finalidade de obter o triângulo retângulo que iria gerar o cone completo.

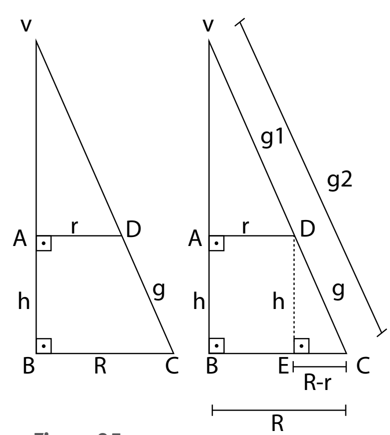


Figura 35.

Dados os valores da base menor (r), da base maior (R) e da altura (h) do trapézio retângulo afixado na haste, é possível determinar o valor da geratriz (g) do tronco de cone por meio da aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DEC. Os triângulos VAD e DEC são *semelhantes, pois seus três ângulos são congruentes, visto que AD // BC (o trapézio é retângulo) e, por construção, AB // DE.*

A semelhança dos triângulos VAD e DEC permite determinar o valor da geratriz (g1) do cone menor (auxiliar) e, consequentemente, é possível determinar o valor da geratriz (g2) do cone maior (g2 = g1 + g).

Tendo os valores de R (base maior do trapézio) e da geratriz (g_2), é possível determinar a área da superfície lateral do cone maior: $Área_{\text{superfície lateral do cone maior}} = \pi R g_2$.

Da mesma forma, tendo os valores de r (base menor do trapézio) e da geratriz (g_1), pode-se determinar a área da superfície lateral do cone menor (auxiliar): $Área_{\text{superfície lateral do cone menor}} = \pi r g_1$.

Finalmente, a área da superfície lateral do tronco de cone seria obtida pela seguinte subtração:

$$Área_{\text{superfície lateral do tronco do cone}} = Área_{\text{superfície lateral do cone maior}} - Área_{\text{superfície lateral do cone menor}} = Área_{\text{superfície lateral do tronco do cone}} = \pi R g_2 - \pi r g_1 = \pi - (R g_2 - r g_1).$$

Assim, a área total do tronco do cone pode ser obtida da seguinte forma:

$$Área_{\text{tronco do cone}} = Área_{\text{superfície lateral do tronco do cone}} + Área_{\text{base maior}} + Área_{\text{base menor}}$$

$$Área_{\text{tronco do cone}} = \pi \cdot (R g_2 - r g_1) + \pi R^2 + \pi r^2$$

Volume do cone de revolução

Assim como o volume de cilindros foi caracterizado como uma pilha de círculos idênticos de área conhecida, o conceito de volume dos cones é associado à ideia de círculos semelhantes agrupados em uma pilha que vai se afunilando, da base até o vértice.

Também o conceito de volume da pirâmide pode ser associado ao de volume do cone: pode-se sugerir aos estudantes a ideia de pirâmides regulares inscritas em um cone, de tal forma que, inicialmente, se tenha uma pirâmide de base quadrangular, depois uma de base pentagonal, outra de base hexagonal, e assim por diante, considerando, a cada etapa, uma pirâmide com um número maior de faces laterais. Essas conjecturas podem resultar na imagem de uma pirâmide de infinitas faces laterais, quase coincidindo com a superfície lateral do cone, o que permitiria a conclusão (intuitiva) de que o volume do cone também pode ser calculado pela aplicação da fórmula:

$$V_{cone} = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3} \quad \text{ou} \quad V_{cone} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

Os estudantes poderiam ser convidados a refletir sobre uma das figuras que serviram como objeto de observação para aplicar a ideia de volume de um cone de revolução. Por exemplo:

14. Como você faria para calcular o volume do tronco de cone resultante da rotação sugerida na Figura 35?

O mesmo raciocínio que foi feito para a construção da fórmula da área do tronco do cone pode ser utilizado para a fórmula do volume desse sólido. Dadas as medidas da base menor (r), da base maior (R) e da altura (h) do trapézio retângulo afixado na haste, é possível "recuperar" o triângulo retângulo, cuja rotação teria gerado o cone original. Para isso, prolonga-se o lado DC, obtendo o triângulo retângulo VBC, em que AD // BC (pois o trapézio dado é retângulo); logo, os triângulos VAD e VBC são semelhantes:

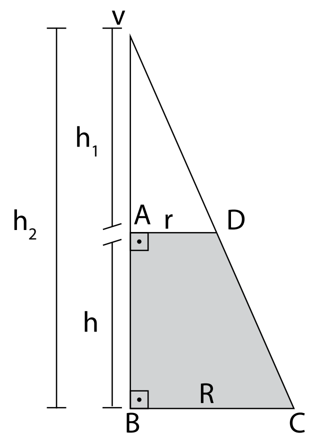


Figura 36.

Nesse caso, $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{R}{r}$

Como $h_2 = h_1 + h$, tem-se: $\dfrac{h_1 \cdot h}{h_1} = \dfrac{R}{r} \longrightarrow h_1 = \dfrac{h - r}{R - r}$ (i)

Assim, obtém-se:

$$Volume_{\text{tronco do cone}} = Volume_{\text{cone original (maior)}} - Volume_{\text{cone retirado (menor)}}$$

$$Volume_{\text{tronco do cone}} = \frac{1}{3}\ \pi R^2 \cdot h_2 - \frac{1}{3}\ \pi r^2 \cdot h_1$$

Lembrando que $h_2 = h_1 + h$, obtém-se:

$$Volume_{\text{tronco do cone}} = \frac{1}{3}\ \pi R^2 \cdot (h_2 + h) - \frac{1}{3}\ \pi r^2 \cdot h_1 = \frac{\pi}{3} \cdot [R^2 \cdot h_1 + R^2 \cdot h - r^2 \cdot h_1]$$

$$Volume_{\text{tronco do cone}} = \frac{\pi}{3} \cdot [h_1 \cdot (R^2 - r^2) + R^2 - h] \qquad \text{(ii)}$$

Substituindo (i) em (ii), obtém-se:

$$Volume_{\text{tronco do cone}} = \frac{\pi}{3} \cdot [\frac{h \cdot r}{R - r} \cdot (R^2 - r^2) + R^2 \cdot h]$$

$$Volume_{\text{tronco do cone}} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot [r \cdot (R + r) + R^2]$$

$$Volume_{\text{tronco do cone}} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot [R^2 + r^2 + r \cdot R]$$

Etapa 4 – A esfera: um sólido de revolução

Esta etapa tem por objetivo fazer uma comparação entre os desenhos feitos pelos estudantes e os sólidos geométricos disponíveis, o que deverá ser uma oportunidade para o levantamento de ideias já construídas pelo grupo sobre a noção de esfera: raio, círculo máximo, eixo, polos, equador, paralelo e meridiano.

Por meio das considerações sobre a Figura 25, serão discutidas algumas ideias referentes à superfície esférica, por exemplo, a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência, com extremidades num eixo. Além disso, os estudantes poderão concluir que a rotação da Figura 21 (semicírculo) em torno do eixo é característica de um sólido de revolução. Peça aos estudantes que respondam à questão a seguir.

- Há algum sólido geométrico sobre a mesa que corresponda aos desenhos que você fez para as Figuras 21, 25, 26 ou 27?

Ampliação da atividade

Em relação à área e ao volume da esfera, pode-se propor uma atividade com a finalidade de discutir uma estratégia viável para planificar uma bola de borracha. Nessa discussão, os estudantes poderão perceber a impossibilidade de planificar uma superfície esférica e estender essa ideia para a discussão sobre o volume da esfera.

Espera-se que os estudantes façam conjecturas no sentido de seccionar a bola em regiões poligonais que tenham uma forma conhecida, cuja área saibam calcular.

Uma reflexão sobre as características das regiões obtidas por esse recorte poderia levar os estudantes a concluir que, uma vez que são partes de uma superfície esférica, essas regiões não são figuras planas e, assim, também não são polígonos. É possível que, nesse caso, façam suposições a respeito de uma subdivisão dessas regiões poligonais em outras regiões menores, formando polígonos cuja área eles também saibam calcular. Por meio desse raciocínio, seria possível considerar a área da superfície esférica como soma da área de regiões poligonais infinitamente pequenas.

Em relação ao volume da esfera, você pode propor que a turma imagine a possibilidade de recortar uma esfera de isopor em pirâmides que tenham o vértice no centro da esfera e a base em sua superfície.

A discussão feita a respeito da área da superfície esférica permitiria que os estudantes concluíssem que, se essas pirâmides tivessem uma base infinitamente pequena, o volume da esfera poderia ser calculado com base na soma dos volumes de todas essas pirâmides.

No entanto, cabe comentar que essas conclusões sobre a área e o volume dessas figuras precisariam ser comprovadas por um tratamento formal, incluindo talvez a dedução de fórmulas (o que seria indispensável para a obtenção dos valores desejados).

Em uma feira de ciências, por exemplo, os estudantes poderiam repetir as experiências com os sólidos de massinha e fios de náilon para que orientem estudantes de outras séries e visitantes sobre como obter os sólidos estudados nessa atividade. Eles poderiam fazer uma breve oficina com esse público e dar as explicações necessárias.

TEMA 5: INVESTIGAÇÕES SOBRE ALEATORIEDADE, ESPAÇO AMOSTRAL E CÁLCULO DE PROBABILIDADE

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Por meio das atividades a seguir, os estudantes farão experimentações para ampliar e aprofundar noções básicas sobre probabilidade – aleatoriedade, espaço amostral e quantificação de probabilidades – e conhecerão a definição de "frequencista" de probabilidade. A ênfase das atividades propostas não reside na teoria, mas sim em experimentos, na incerteza e na regularidade de resultados. Por exemplo, um departamento de trânsito não pode prever quais carros se acidentarão em um fim de semana em particular, mas pode predizer de modo bastante satisfatório o número de ocorrências de acidentes de carro, baseando-se em eventos anteriores. Todavia, esse departamento pode errar totalmente a previsão, se nenhum acidente ocorrer. Em síntese, essas atividades investigativas apresentarão aos estudantes a seguinte visão: a Matemática não trabalha apenas com fenômenos determinísticos, mas também com a incerteza.

Conteúdos envolvidos

Espaço amostral de fenômenos aleatórios; quantificação de probabilidades.

Habilidades

Identificar características de fenômenos aleatórios, diferenciando-os dos determinísticos; interpretar o resultado de uma probabilidade com base em um experimento estatístico (definição "frequencista"); conjecturar a respeito da probabilidade teórica de um evento, antes de um experimento, com base em eventos anteriores.

Número de aulas

4 aulas.

Série

Essas atividades podem ser desenvolvidas na 2ª série ou na 1ª série do Ensino Médio. Todavia, seria recomendável que fossem discutidas antes do estudo das Situações de Aprendizagem do Caderno da 2ª série de Matemática de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo (São Paulo faz escola), pois essas atividades experimentais têm por finalidade discutir conceitos fundamentais de probabilidade.

COMO INVESTIGAR O PROBLEMA?

Execução da atividade experimental

Divida a turma em grupos de, no máximo, quatro estudantes e disponibilize as peças do kit sobre probabilidade, papéis quadriculados e material para a construção de gráficos. Agende um horário no laboratório de informática, onde os estudantes deverão fazer as pesquisas e utilizar alguns *applets* que fazem simulações sobre um grande número de jogadas de moedas ou de dados, por exemplo.

Material necessário

Conjunto de probabilidade: dados com números variados de faces 4, 6, 8, 12 e 20; conjunto de probabilidade: roletas, cubinhos de madeira numerados e/ou coloridos, moedas e fichas coloridas; calculadoras.

Procedimentos a ser adotados

Etapa 1 – Discutindo a aleatoriedade

Esta etapa tem por objetivo discutir a questão da aleatoriedade. O conceito de probabilidade, relevante para o estudo de fenômenos aleatórios, ou seja, aqueles eventos cujas ocorrências não podem ser antecipadas, pode ser aplicado a experimentos aleatórios, cujas ocorrências são variáveis e incertas, embora satisfaçam condições básicas para previsões.

Proponha aos estudantes que discutam as questões a seguir:

1. O que é um fenômeno aleatório? Dê exemplos.

Você deverá conduzir a discussão no sentido de que, se embora possa conhecer um conjunto de resultados possíveis para um determinado evento, não se sabe quais desses resultados vão de fato acontecer. Também não há certeza de quando um evento particular acontecerá ou em que ordem os eventos irão acontecer. Essa incerteza caracteriza a aleatoriedade, pois não é possível determinar de que maneira uma sequência de eventos vai acontecer.

2. Um casal tem quatro filhas e está pensando em ter mais um filho. O que você acha que vai acontecer? Esse quinto filho deverá ser menino ou menina? Explique.

3. Uma pessoa jogou uma moeda simétrica e homogênea e, em sete lançamentos, saiu “cara”. O que se pode prever com relação ao oitavo lançamento?

4. Tenho uma lista com 50 músicas em meu arquivo do computador. Essas músicas estão numeradas. Vou tocá-las e escolhi a função *random playlist*. Nessa função, é possível determinar a sequência em que essas músicas serão executadas? Caso você não saiba o significado de *random*, procure em um dicionário de língua inglesa.

Durante a discussão com a turma, cabe dizer que não é pelo fato de esse casal ter tido quatro filhas que o sexo do quinto filho estará previamente determinado. A concepção é um fenômeno aleatório e vai depender do espermatozoide que irá fecundar o óvulo: o quinto filho do casal poderá ser uma menina ou um menino. O lançamento da moeda é aleatório e um lançamento é independente do outro: no oitavo lançamento, pode sair "cara" ou "coroa". A função *random playlist* determina que as músicas serão tocadas em uma ordem aleatória, randômica e, portanto, não é possível determinar a ordem em que serão executadas.

Em seguida, proponha que leiam o texto a seguir e discutam as ideias com os colegas.

As Ciências da Natureza e a Matemática estudam fenômenos determinísticos. Mas o que é determinismo?

O determinismo pode ser resumido da seguinte maneira:

- dado um fenômeno, sempre será possível determinar sua causa necessária;
- conhecido o estado atual de um conjunto de fatos, sempre será possível conhecer o estado subsequente, que será seu efeito necessário.

Em outras palavras, o determinismo afirma que se podem conhecer as causas (isto é, o estado anterior de um conjunto de fatos) e os efeitos de um fenômeno atual (isto é, o estado posterior de um conjunto de fatos).

No entanto, a Física contemporânea trouxe de volta a discussão em torno da ideia de acaso, pois um fato abalou essa ciência e ficou conhecido com o nome de princípio de incerteza ou de indeterminação. Esse fato foi trazido pelos estudos do físico alemão Werner Heisenberg (1901-1976) ao descobrir que, no nível atômico, conhecer o estado ou a situação atual de um fenômeno, ou um conjunto de fatos, não permite prever a situação ou o estado seguinte, nem, portanto, descobrir qual foi a situação ou o estado anterior.

Assim, o estudo do acaso, do aleatório, passou a atrair grande interesse dos físicos e matemáticos.

Sugira aos estudantes que realizem as atividades a seguir.

5. Dada a sequência 0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, [...], qual será o termo seguinte? E o décimo primeiro termo? Esse valor está determinado ou depende do acaso?
O termo seguinte é 127; o décimo primeiro termo é 1.023; sim, está determinado, pois obedece à fórmula: $2^{n-1} - 1$.

6. O deslocamento s, em metros, de uma partícula em função do instante t, em segundos, é dado pela expressão $s(t) = 12 + 4t$. Qual será a posição dessa partícula em $t = 12$ segundos? Esse valor está determinado ou depende do acaso?
Determinado, pois $s(12) = 12 + 4 \cdot (12) = 60$ *m.*

7. A sequência a seguir indica a quantidade de dias de chuva em uma cidade em cada mês dos últimos seis meses: 1, 2, 3, 5, 8, 10. É possível prever a quantidade de dias de chuva do mês seguinte? *Não é possível prever, pois se trata de um fenômeno aleatório.*

A atividade a seguir tem por objetivo discutir se, em cada um dos jogos apresentados em uma cartela, as sequências foram aleatórias ou não. Para tanto, divida a turma em grupos de quatro estudantes e sugira que cada um escolha um jogo.

Proponha a cada grupo que escolha um jogo para analisar. Em cada um dos jogos, devem descobrir se existem regularidades e se podem ordenar com 100% de certeza os três últimos caracteres, de modo que haja uma regularidade comum com as dez sequências anteriores. Para isso, é necessária a classificação em jogo previsível ou jogo imprevisível. Peça aos grupos que discutam entre si, mas não informem os demais colegas da classe. Posteriormente, você indicará o grupo vencedor.

JOGO 1	
Sequência dada	Sequência modificada
FDE	DEF
PSC	CPS
RAE	AER
AED	ADE
PQR	PQR
SMD	DMS
DAW	ADW
MSF	FMS
RCP	CPR
PGH	GHP
JCS	???

Tabela 10.

JOGO 2	
Sequência dada	Sequência modificada
679	796
372	372
983	398
497	794
817	178
295	952
978	798
475	754
783	378
532	532
653	???

Tabela 11.

JOGO 3	
Sequência dada	Sequência modificada
568	568
261	126
872	728
386	368
928	928
184	148
867	768
364	346
672	726
643	346
542	???

Tabela 12.

JOGO 4	
Sequência dada	Sequência modificada
RCT	TRC
ABC	CBA
VGT	VTG
HGB	HGB
EID	IED
RCP	RPC
JCR	RJC
MSF	SMF
NLC	LCN
BAP	PBA
AFG	???

Tabela 13.

Após os grupos concluírem suas tarefas, é necessário que você sistematize as discussões realizadas no interior de cada grupo e conclua que apenas os Jogos 1 e 3 são previsíveis e que cada um apresenta uma única regra comum: no Jogo 1, a ordem da sequência de letras é alfabética; no Jogo 3, os números começam por algarismos ímpares e os outros dois algarismos estão em ordem crescente da esquerda para a direita. Nos Jogos 2 e 4, a última linha pode ser preenchida aleatoriamente, tendo em vista que não há uma regra comum a todos eles.

Etapa 2 – Delineando o espaço amostral

A atividade a seguir tem por objetivo discutir o conceito de espaço amostral. Os estudantes deverão pesquisar o significado de espaço amostral, segundo o qual pode-se dizer que, para alguns fenômenos, embora não se tenha certeza da ocorrência de um resultado, pode ou não predizer se um resultado vai ou não ocorrer.

1. Em uma caixa há cubinhos: dois azuis e um verde. Se você tirar dois cubinhos dessa caixa ao acaso, será mais provável sair dois azuis ou um azul e o outro verde?

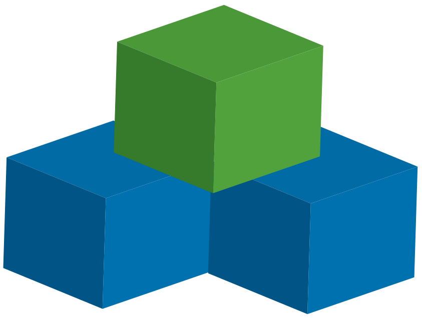


Figura 37.

É possível que muitos respondam que a chance de sair dois azuis é maior. Todavia, pelo registro do espaço amostral, os estudantes devem perceber que há duas vezes mais combinações azul-verde do que combinações azul-azul. Há quatro modos de obter azul-verde (A1-V; A2-V; V-A1; V-A2) e apenas duas maneiras de obter azul-azul (A1-A2; A2-A1).

Em exercícios de probabilidade, é preciso determinar quais são todos os eventos possíveis no contexto. O conjunto de eventos possíveis é geralmente referido como "espaço amostral" e desempenha um papel essencial que às vezes é subestimado, mesmo nos problemas mais simples de probabilidade. Os estudantes precisam ser capazes de identificar e contabilizar o espaço amostral para compreender e calcular as probabilidades de eventos específicos. Esse problema é um exemplo clássico para mostrar a importância dessa discussão. Trata-se de um problema **contra intuitivo**. Por isso, nesse momento, ainda não convém indicar o cálculo do valor da probabilidade como uma maneira de mostrar a importância para os estudantes de pensar no espaço amostral.

Depois dessa discussão, os estudantes deverão fazer essa experiência em grupos pelo menos cinco vezes, utilizando os cubinhos do kit de probabilidade. Cada grupo deverá indicar quantas vezes saiu azul-azul e quantas vezes saiu verde-azul e azul-verde. Anotadas as respostas de cada grupo, você poderá sistematizar e possivelmente indicar que o número de vezes que saiu um cubo de cada cor é duas vezes maior que o número de vezes que saiu dois azuis.

Para continuar essa discussão do espaço amostral, proponha o problema a seguir, em que os estudantes deverão levantar suas conjecturas antes de jogar. Cada grupo deverá ter dois dados de seis faces.

2. Jogo com dois dados.

Você e seus colegas de grupo vão tentar prever resultados das somas de números ao lançar dois dados. Cada estudante deverá jogar dez vezes. Mas, antes de jogar, procure adivinhar quantas vezes sairá cada soma de 2, 3, 4, até 12. Você poderá achar, por exemplo, que não sairá a soma 9. Após cada colega ter anotado suas previsões possíveis, comecem a jogar.

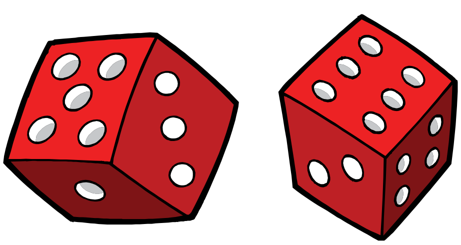


Figura 38.

Anote os totais ao lado de suas previsões, para ver quantas você acertou. Anote também a quantidade da soma de cada jogada, mesmo para aquelas que você não tenha escolhido, para ver quem do grupo fez a melhor previsão. Alterne entre você e seus parceiros até o grupo realizar 40 jogadas.

Após a decisão de quem ganhou o jogo em cada grupo, você poderá perguntar, um a um, os resultados de cada soma e colocar as respostas em uma tabela na lousa. Discuta com os estudantes que os resultados possíveis variam de 2 (1 + 1) a 12 (6 + 6). Assim, nessa tabela, devem constar quantas vezes saiu a soma 2, a soma 3, e assim por diante. Posteriormente, construa o espaço amostral das jogadas desses dois dados por meio de um diagrama de árvore. Os estudantes poderão verificar que a melhor previsão seria a soma 7 (há 6 possibilidades em 36) e as piores seriam a soma 2 (uma única possibilidade) e a soma 12 (também apenas uma). Destaque que essa previsão teórica pode não se verificar na prática.

Etapa 3 – Quantificação de probabilidades

As atividades a seguir devem ser realizadas em duas perspectivas:

a) Cálculo teórico da probabilidade de um evento A é a razão entre o número de resultados (ou casos) favoráveis para a ocorrência de A e o número de resultados possíveis, considerando, nesse caso, que o espaço amostral é equiprovável (definição clássica).

b) Segundo a definição “frequencista”, a probabilidade está baseada nos experimentos realizados: quanto maior for o número de experimentos, a probabilidade de ocorrência de um evento tende a se estabilizar em torno de um valor. Coloque os diferentes tipos de dados e roletas sobre a mesa para que os estudantes joguem alternadamente.

Atividade 1. Dados

Escolha um dado e analise os resultados possíveis. Em seguida, discuta com seus colegas como definirão a face que indicará o número de pontos de cada jogada. Com o dado de forma cúbica, o estabelecido é o número de pontos da face superior. Mas como decidir qual é o resultado do lançamento se o dado não tiver face superior, por exemplo, no caso de o dado ter o formato de um tetraedro regular? Nesses casos, talvez seja melhor convencionar que será a face em que o dado ficará apoiado após o lançamento. Indique a probabilidade de sair cada face e depois jogue o dado diversas vezes, anotando os resultados. Adicione seus resultados aos de seus colegas de grupo e indique a probabilidade obtida pelo grupo para cada resultado. Depois, faça o mesmo com os resultados de todos os grupos e calcule novamente a probabilidade. Verifique se a probabilidade obtida na prática se aproxima da teórica estabelecida antes de iniciar o jogo. Repita a experiência, desta vez utilizando mais dois tipos de dados.

© Fernando Genaro/Fotoarena

Figura 39.

Atividade 2. Roletas

Escolha uma das roletas e verifique se elas estão funcionando adequadamente. Analise os resultados possíveis: indique a probabilidade de a roleta parar em cada número ou em cada cor. Depois experimente fazendo a roleta girar diversas vezes. Combine com seus colegas que, se a seta cair no traço que separa as regiões, a roleta será novamente colocada para girar. Adicione seus resultados aos de seus colegas de grupo e indique a probabilidade de a roleta parar em cada número ou em cada cor. Posteriormente, faça o mesmo com os resultados de todos os grupos e calcule novamente a probabilidade. Verifique se a probabilidade obtida na prática se aproxima da teórica estabelecida antes de iniciar o jogo. Repita a experiência com a outra roleta.

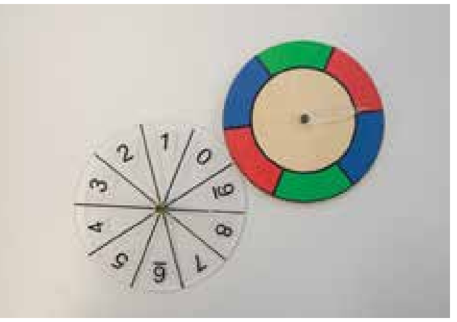


Figura 40.

A compreensão da noção de probabilidade constitui uma etapa importante (senão necessária) para o desenvolvimento do pensamento matemático: muitas pessoas acreditam que a Matemática trabalha apenas com fenômenos determinísticos e que, por esse motivo, o estudo do acaso não seria científico. Por outro lado, o estudo da probabilidade possibilita a retomada e, de certa forma, em alguns casos, a ampliação de noções concernentes aos números racionais. Além disso, a probabilidade é um excelente contexto que pode contribuir para a proposição de tarefas investigativas como as apresentadas neste Caderno. Nelas, estão relacionados dois temas importantes da Matemática: a probabilidade e a estatística, tendo em vista o trabalho com as definições: a clássica, aquela que considera a probabilidade de um evento A como a razão entre o número de resultados (ou casos) favoráveis à ocorrência de A e o número de resultados possíveis; e a "frequencista", que quantifica estatisticamente as chances pelos experimentos realizados. Assim, quanto mais experimentos forem feitos, mais a probabilidade experimental se aproxima da teórica.

Ampliação da atividade

Para avançar em relação ao estudo da probabilidade, proponha a seguinte questão para os estudantes: *Se um dado for jogado uma vez, a chance de sair o número 5 é de um em seis, pois tem seis resultados possíveis. Essa é uma chance teórica. No entanto, pode-se jogar o dado 20 vezes e não sair nenhuma vez o 5. Mas, se o dado for jogado 1 milhão de vezes, o que se pode dizer sobre a chance de sair o número 5?* Depois de a turma fazer suas conjecturas, proponha que procurem na internet *applets* que possam modelar esses experimentos aleatórios. Por meio deles, será possível comprovar que a probabilidade de sair o 5 deverá estar bastante próxima de 16,6%, ou seja, de um em seis.

CONCEPÇÃO E COORDENAÇÃO GERAL
PRIMEIRA EDIÇÃO 2014

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA (CGEB)

Coordenadora
Maria Elizabete da Costa

Diretor do Departamento de Desenvolvimento Curricular de Gestão da Educação Básica
João Freitas da Silva

Diretora do Centro de Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional – CEFAF
Valéria Tarantello de Georgel

Coordenação Técnica
Roberto Canossa
Roberto Liberato
Suely Cristina de Albuquerque Bomfim

PROGRAMA ENSINO INTEGRAL

Coordenação da elaboração dos materiais de apoio ao Programa Ensino Integral
Valéria de Souza

Apoio técnico e pedagógico
Marilena Rissutto Malvezzi

Equipe Técnica
Maria Silvia Sanchez Bortolozzo (coordenação), Carlos Sidiomar Menoli, Dayse Pereira da Silva, Elaine Aparecida Barbiero, Helena Cláudia Soares Achilles, João Torquato Junior, Kátia Vitorian Gellers, Maria Camila Mourão Mendonça de Barros, Maria Cecília Travain Camargo, Maria do Carmo Rodrigues Lurial Gomes, Maúna Soares de Baldini Rocha, Pepita de Souza Figueredo, Sandra Maria Fodra, Tomás Gustavo Pedro, Vera Lucia Martins Sette, Cleuza Silva Pulice (colabor.) e Wilma Delboni (colabor.)

GESTÃO DO PROCESSO DE PRODUÇÃO EDITORIAL 2014

FUNDAÇÃO CARLOS ALBERTO VANZOLINI
Presidente da Diretoria Executiva
Mauro de Mesquita Spínola

Vice-Presidente da Diretoria Executiva
José Joaquim do Amaral Ferreira

GESTÃO DE TECNOLOGIAS EM EDUCAÇÃO

Direção da Área
Guilherme Ary Plonski

Coordenação Executiva do Projeto
Angela Sprenger e Beatriz Scavazza

Gestão da Produção Editorial
Luis Marcio Barbosa e Renata Simões

Equipe de Produção

Editorial: Guiomar Milan (coordenação), Bruno Reis, Carina Carvalho, Karina Kempter, Karinna A. C. Taddeo, Letícia Maria Delamare Cardoso, Marina Murphy e Natália Pereira Leal

Direitos autorais e iconografia: Denise Blanes (coordenação), Beatriz Fonseca Micsik, Érica Marques, José Carlos Augusto, Marcus Ecclissi e Vanessa Leite Rios

Produção editorial: Adesign (projeto gráfico) e Jairo Souza Design Gráfico (diagramação e ilustrações não creditadas)

ELABORAÇÃO DOS CONTEÚDOS ORIGINAIS

Coordenação do desenvolvimento dos conteúdos dos volumes de apoio ao Programa Ensino Integral
Ghisleine Trigo Silveira

Cadernos do Gestor

Avaliação da aprendizagem e nivelamento
Zuleika de Felice Murrie

Diretrizes do Programa Ensino Integral
Valéria de Souza (coord.), Carlos Sidiomar Menoli, Dayse Pereira da Silva, Elaine Aparecida Barbiero, Helena Cláudia Soares Achilles, João Torquato Junior, Kátia Vitorian Gellers, Maria Camila Mourão Mendonça de Barros, Maria Cecília Travain Camargo, Maria do Carmo Rodrigues Lurial Gomes, Maria Silvia Sanchez Bortolozzo, Maúna Soares de Baldini Rocha, Pepita de Souza Figueredo, Sandra Maria Fodra, Tomás Gustavo Pedro, Vera Lucia Martins Sette, Cleuza Silva Pulice (colabor.) e Wilma Delboni (colabor.)

Formação das equipes do Programa Ensino Integral – Vol. 1
Beatriz Garcia Sanchez, Cecília Dodorico Raposo Batista, Maristela Gallo Romanini e Thais Lanza Brandão Pinto

Formação das equipes do Programa Ensino Integral – Vol. 2
Beatriz Garcia Sanchez, Cecília Dodorico Raposo Batista, Maristela Gallo Romanini e Thais Lanza Brandão Pinto

Modelo de gestão do Programa Ensino Integral
Maria Camila Mourão Mendonça de Barros

Modelo de gestão de desempenho das equipes escolares
Ana Carolina Messias Shinoda e Maúna Soares de Baldini Rocha

Cadernos do Professor

Biologia: atividades experimentais e investigativas
Maria Augusta Querubim e Tatiana Nahas

Ciências Físicas e Biológicas: atividades experimentais e investigativas
Eugênio Maria de França Ramos, João Carlos Miguel Tomaz Micheletti Neto, Maíra Batistoni e Silva, Maria Augusta Querubim, Maria Fernanda Penteado Lamas e Yassuko Hosoume

Física: atividades experimentais e investigativas
Eugênio Maria de França Ramos, Marcelo Eduardo Fonseca Teixeira, Ricardo Rechi Aguiar e Yassuko Hosoume

Manejo e gestão de laboratório: guia de laboratório e de descarte
Solange Wagner Locatelli

Matemática: atividades experimentais e investigativas – Ensino Fundamental – Anos Finais
Maria Silvia Brumatti Sentelhas

Matemática: atividades experimentais e investigativas – Ensino Médio
Ruy César Pietropaolo

Pré-iniciação Científica: desenvolvimento de projeto de pesquisa
Dayse Pereira da Silva e Sandra M. Rudella Tonidandel

Preparação Acadêmica
Marcelo Camargo Nonato

Projeto de Vida – Ensino Fundamental – Anos Finais
Isa Maria Ferreira da Rosa Guará e Maria Elizabeth Seidl Machado

Projeto de Vida – Ensino Médio
Isa Maria Ferreira da Rosa Guará e Maria Elizabeth Seidl Machado

Protagonismo Juvenil
Daniele Próspero e Rayssa Winnie da Silva Aguiar

Química: atividades experimentais e investigativas
Hebe Ribeiro da Cruz Peixoto e Maria Fernanda Penteado Lamas

Robótica – Ensino Fundamental – Anos Finais
Alex de Lima Barros

Robótica – Ensino Médio
Manoel José dos Santos Sena

Tutoria e Orientação de estudos
Cristiane Cagnoto Mori, Jacqueline Peixoto Barbosa e Sandra Maria Fodra

Cadernos do Aluno

Projeto de Vida – Ensino Fundamental – Anos Finais
Pepita de Souza Figueredo e Tomás Gustavo Pedro

Projeto de Vida – Ensino Médio
Pepita de Souza Figueredo e Tomás Gustavo Pedro

Apoio
Fundação para o Desenvolvimento da Educação – FDE

• Nos cadernos de apoio ao Programa Ensino Integral são indicados *sites* para o aprofundamento de conhecimentos, como fonte de consulta dos conteúdos apresentados e como referências bibliográficas. Todos esses endereços eletrônicos foram checados. No entanto, como a internet é um meio dinâmico e sujeito a mudanças, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo não garante que os *sites* indicados permaneçam acessíveis ou inalterados.

• Os mapas reproduzidos no material são de autoria de terceiros e mantêm as características dos originais no que diz respeito à grafia adotada e à inclusão e composição dos elementos cartográficos (escala, legenda e rosa dos ventos).

Catalogação na Fonte: Centro de Referência em Educação Mario Covas

S239m São Paulo (Estado) Secretaria da Educação.

Matemática: atividades experimentais e investigativas; Ensino Médio - Caderno do Professor/ Secretaria da Educação; coordenação, Valéria de Souza; textos, Ruy César Pietropaolo. - São Paulo : SE, 2014.

64 p.

Material de apoio ao Programa Ensino Integral do Estado de São Paulo.

ISBN 978-85-7849-689-0

1. Matemática 2. Atividade prática 3. Ensino Médio 4. Programa Ensino Integral 5. São Paulo I. Souza, Valéria de. II. Pietropaolo, Ruy César. III. Título.

CDU: 371.314:373.5:51(815.6)

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES

GOVERNO DO ESTADO
DE SÃO PAULO